Examen du baccalauréat - Session de contrôle juin 2014

Section Mathématiques

Épreuve de Mathématiques

Corrigé

Exercice 1

1) Le point O est le milieu de [BI] donc $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IO}$, il en résulte que $h(O)=B$.

$\begin{cases}\dfrac{OA}{OI}=2\\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$, il en résulte que $S(I)=A$.

2) a) On sait que $h(O)=B$ et $S(O)=O$ par suite le point O' est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(O,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{OO'}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

b) On sait que $h(I)=I$ et $S(I)=A$ par suite le point I' est le barycentre des points pondérés $(I,3)$ et $(A,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{II'}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

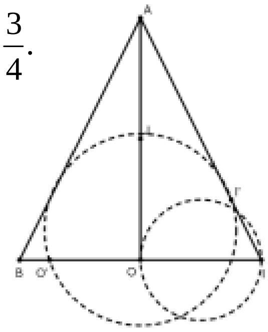
3) a) $h(M)=P\Leftrightarrow\overrightarrow{IP}=2\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow z_P-1=2(z-1)\Leftrightarrow z_P=2z-1$.

b) S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui envoie M en Q donc

$z_Q=2e^{i\frac{\pi}{2}}z=2iz$.

c) $f(M)=M'$ donc le point M' est le barycentre des points pondérés $(P,3)$ et $(Q,1)$ on en déduit que

$\overrightarrow{PM'}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ}\Leftrightarrow z'-z_P=\dfrac{1}{4}(z_Q-z_P)\Leftrightarrow z'=\dfrac{1}{4}(2iz-2z+1)+2z-1=\dfrac{3+i}{2}z-\dfrac{3}{4}$.



d) L'expression complexe de f est de la forme $z'=az+b$ avec $a=\dfrac{3+i}{4}\neq 0$

donc f est une similitude directe, comme $f(O)=O'$ et $f(I)=I'$,

on en déduit que l'image du cercle de diamètre [OI] par f est le cercle de diamètre [O'I'].

Exercice 2

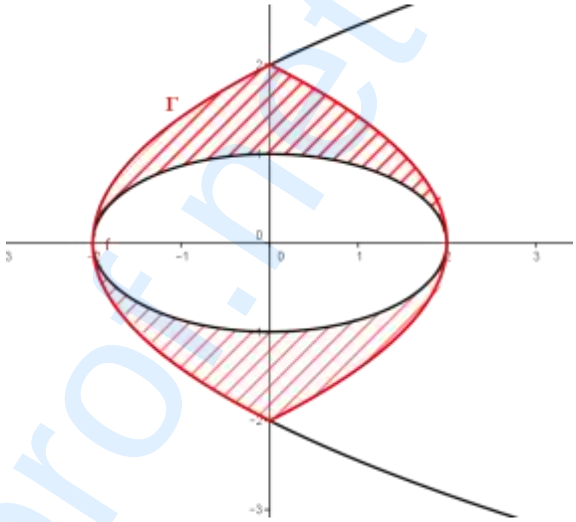
1) a) Une équation de (E) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ donc $a^2=4$ et $b^2=1$, on en déduit que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ par suite les coordonnées des foyers de (E) sont $(\sqrt{3},0)$ et $(-\sqrt{3},0)$ et son excentricité est $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $M(x,y)\in(P)\Leftrightarrow y^2=2x+4\Leftrightarrow y^2=2(x+2)$. Soit $\Omega(-2,0)$ et on pose $\begin{cases}X=x+2\\Y=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X-2\\y=Y\end{cases}$.

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, $M(X,Y)\in(P)\Leftrightarrow Y^2=2X$, il en résulte que dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et la directrice de (P) a pour équation $X=-\frac{1}{2}$. On en déduit que dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, $F\left(-\frac{3}{2},0\right)$ et la directrice a pour équation $x=-\frac{5}{2}$.

2) a) $M(x,y)\in(\Gamma)\Leftrightarrow y^2=-2|x|+4\Leftrightarrow y^2=-2|-x|+4\Leftrightarrow M(-x,y)\in(\Gamma)$. Il en résulte que $(O,\vec{j})$ est un axe de symétrie de (Γ).

b) $\begin{cases}M(x,y)\in\Gamma\\ x\in[-2,0]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=2x+4\\ x\in[-2,0]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(P)\\ x\in[-2,0]\end{cases}\Leftrightarrow M\in(P_1)$ où (P_1) est la partie de (P) située dans le demi-plan de frontière $(O,\vec{j})$ contenant le point de coordonnées $(-2,0)$, il en résulte que $\Gamma=(P_1)\cup(P_2)$ où (P_2) est le symétrique de (P_1) par rapport à $(O,\vec{j})$.



3) a) Pour tout $t\in[0,2], t^2+\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2=t^2+4-t^2=4$. Il en résulte que $M\left(t,\sqrt{4-t^2}\right)\in C$.

b) $I_1=\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), les axes du repère et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=2$, on en déduit que $I_1=\frac{\text{Aire du disque de frontière (C)}}{4}=\frac{\pi\times2^2}{4}=\pi$.

4) $I_2=\int_0^2\sqrt{-2t+4}\,dt=-\frac{1}{2}\int_0^2-2\sqrt{-2t+4}\,dt=-\frac{1}{3}\left[(-2t+4)\sqrt{-2t+4}\right]_0^2=\frac{8}{3}$.

5) Par raison de symétrie, $\frac{1}{4}\mathcal{A}=I_2-\frac{1}{2}I_1$ donc $\mathcal{A}=4I_2-2I_1-=\left(\frac{32}{3}-2\pi\right)$ua

Exercice 3

1) a) $-9\times1111-10^4\times(-1)=-9999+10000=1$ donc $(-9,-1)$ est solution de (E).

b) Le couple $(-9,-1)$ est solution de (E) donc

$$1111x-10^4y=1111\times(-9)-10^4\times(-1)\text{ donc }1111(x+9)=10^4(y+1)\qquad(*)$$

donc 1111 divise $10^4(y+1)$ et $1111\wedge10^4=1$ d'où 1111 divise $(y+1)$ par suite il existe un entier k tel que $y+1=1111k$ ou encore $y=1111k-1,\ k\in\mathbb{Z}$.

en remplaçant y par $1111k-1$ dans $(*)$, on obtient $x=10^4k-9$.

Ainsi si le couple (x,y) est solution de (E) alors $x=10^4k-9$ et $y=1111k-1,\ k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $x=10^4k-9$ et $y=1111k-1,\ k\in\mathbb{Z}$, alors $1111(10^4k-9)-10^4(1111k-1)=1$

On en déduit que $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \left\{\left(10^4k-9\ ,1111k-1\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) a) S'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 10^4q+1$, alors $1111p = 10^4q+1 \Leftrightarrow 1111p - 10^4q = 1$, il en résulte que (p,q) est solution de (E).

b) $\begin{cases} n \equiv 0\left(\bmod 1111\right) \\ n \equiv 1\left(\bmod 10^4\right)\end{cases} \Leftrightarrow$ il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 10^4q+1$, alors d'après a) (p,q) est solution de (E), il en résulte que $n = 1111\left(10^4k-9\right) = 1111\times10^4k - 9999, k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $n = 1111\times10^4k-9999, k\in\mathbb{Z}$, alors $\begin{cases} n \equiv 0\left(\bmod 1111\right) \\ n \equiv 1\left(\bmod 10^4\right)\end{cases}$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}} = \left\{1111\times10^4k-9999, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) $\begin{cases} 1111\times10^4k-9999 \geq 0 \\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{9999}{1111\times10^4} = 0.0009 \\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$, soit $k = 1$ donc $n = 11100001$.

<u>Exercice 4</u>

1) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln x$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{f(x)} = 0 = g(0)$ car $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, il en résulte que g est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{f(x)}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)e^{f(x)}\dfrac{1}{\ln x} = 0 = g'_d(0)$

c) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$.

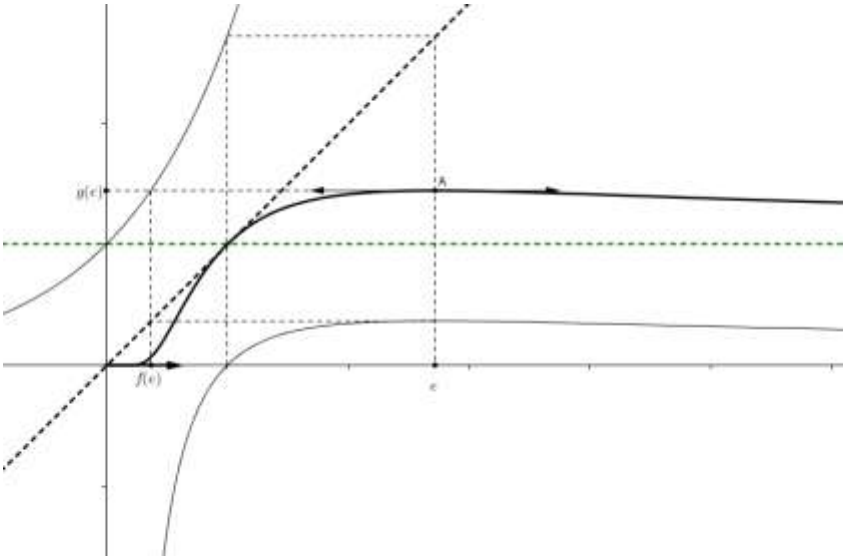
x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) a) Voir figure.

b) $T : y = g'(1)(x-1) + g(1) = x$

c)



4) a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 1$.

b) $u_1 = 1, u_2 = 1.41, u_3 = 1.44$ et pour tout $n \geq 3, u_n \geq u_{n+1}$ car g est décroissante sur $[e, +\infty[$, il en résulte que $u_n = g(n) = \sqrt[n]{n}$ est maximal si et seulement si $n = 3$.