


الصفحة 1 4	<p>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</p> <p>الدورة العادية 2017</p> <p>- الموضوع -</p>	<p>الملكمة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي</p> <p>المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه</p>
	NS 24	

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

mas

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها المصفوفة

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي .

نضع $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و لكل $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ،

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}$$

نعتبر المجموعة $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$ 0,5

2- نعرف على $M_3(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي "T" بما يلي : 0,5

$$(\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4) \quad M(a, b) T M(c, d) = M(a, b) \times A \times M(c, d)$$

تحقق أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), T)$

3- ليكن φ التطبيق من \mathbb{C}^* نحو E الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ (حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)

بالمصفوفة $M(a, b)$ من E

(أ) تحقق من أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, T) و أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ حيث $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$ 0,75

(ب) استنتج أن (E^*, T) زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد J 0,75

4- (أ) بين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في E 0,5

(ب) استنتج أن $(E, +, T)$ جسم تبادلي 0,5

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

الجزء الأول :

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$ (E)

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (2im)^2$	0,5
2- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E)	0,5
<u>الجزء الثاني: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$</u>	
نفرض أن $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$ ونضع: $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ و $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$	
نعتبر النقط A و B و M و M_1 و M_2 التي أحاقها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2	
1- تحقق أن: $z_1 = iz_2 + 1$	0,25
ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللق $\omega = \frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$	0,5
2- تحقق من أن: $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$	0,5
ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمة فإن M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحاقها $[AB]$	0,5
ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. (لاحظ أن $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)	0,75

التمرين الثالث: (3 ن)

نقبل أن 2017 عدد أولي وأن $2016 = 2^5 3^{27}$	
ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5	
1- ليكن الزوج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث: $px + y^{p-1} = 2017$	
أ) تحقق أن: $p < 2017$	0,25
ب) بين أن: p لا يقسم y	0,5
ج) بين أن $y^{p-1} \equiv 1 [p]$ ثم استنتج أن p يقسم 2016	0,75
د) بين أن: $p = 7$	0,5
2- حدد، حسب قيم p، الأزواج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي تحقق: $px + y^{p-1} = 2017$	1

التمرين الرابع: (10 ن)

<u>الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:</u>	
$(\forall x \in]0, +\infty[) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ و $f(0) = 0$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (ناخذ $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm$)	
1- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0	0,25
ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,5

ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$	0,5
2-1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول ميانيا النتيجة المحصل عليها .	0,5
ب) اعط جدول تغيرات الدالة f	0,25
3-1) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها .	0,75
ب) أرسم المنحنى (C) . (نأخذ $f(1) \simeq 0,7$ و $4e^{-3} \simeq 0,2$)	0,5
الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$	
1- بين أن الدالة F متصلة على المجال $]0, +\infty[$	0,25
2-1) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن :	0,5
$(\forall x \in]0, +\infty[) \int_x^1 e^{-t} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-t} dt$	
ب) حدد $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-t} dt$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$	0,25
ج) بين أن : $\int_0^1 f(x) dx = e^{-1}$	0,5
3- أحسب بالسنتيمتر مربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت ذات المعادلات : $x = 0$ و $x = 2$ و $y = 0$	0,5
4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n = F(n) - F(n+2)$	
أ) باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية ، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n, n+2[$	0,5
بحيث : $u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}}$	
ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$	0,25
ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0,25
الجزء الثالث :	
1-1) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً وحيد a_n بحيث : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$	0,5
ب) بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 1}$ تزايدية	0,25
ج) تحقق أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$	0,25
2-1) بين أن : $(\forall t \in]0, +\infty[) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$	0,25
ب) بين أن : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$	0,5

3- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4	
(أ) تحقق أن $a_4 \geq 1$ ثم استنتج أن : $a_n \geq 1$ (نقبل أن : $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$)	0,5
(ب) بين أن : $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ (يمكنك استعمال السؤالين 1-ج) و 2-ب) من الجزء الثالث)	0,5
(ج) بين أن : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ (يمكنك استعمال السؤالين 3-أ) و 3-ب)) ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$	0,5
(د) حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$	0,5