تصحيح التمرين الأول

1- لنبين أن E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$

✓ $E \neq \varnothing$ لأن $O = M(0,0) \in E$

✓ $E \subset M_3(\mathbb{R})$

✓ ليكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E : $M(a,b) - M(c,d) \in E$ ؟

لدينا :
$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

إذن :
$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a-c & b-d & -b+d \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -a+c & a-c \end{pmatrix}$$

إذن :
$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -(a-c) & a-c \end{pmatrix}$$

و منه: $M(a,b) - M(c,d) = M(a-c, b-d) \in E$ ($(a-c, b-d) \in \mathbb{R}^2$)

و بالتالي : E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$

2- لنبين أن E جزء مستقر من $\left(M_3(\mathbb{R}),\mathrm{T}\right)$

✓ لدينا : $E \subset M_3(\mathbb{R})$

✓ ليكن $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E

$M(a,b)\mathrm{T}M(c,d) \in E$ ؟

لدينا : $M(a,b)\mathrm{T}M(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$

إذن :
$$M(a,b)\mathrm{T}M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

إذن :
$$M(a,b)\mathrm{T}M(c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

إذن : $M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ ad+bc & -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$

و منه : $M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=M(ac-bd,ad+bc)\in E$ ($(ac-bd,ad+bc)\in\mathbb{R}^2$)

إذن $\left(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right)\quad M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)\in E$

و بالتالي : E جزء مستقر من $\left(M_3(\mathbb{R}),\mathrm{T}\right)$

3- أ)

✓ لنبين أن φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو (E,T)

ليكن $a+ib$ و $c+id$ من $\mathbb{C}^*$ بحيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و $(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$\varphi\left((a+ib)\times(c+id)\right)=\varphi(a+ib)\mathrm{T}\varphi(c+id)$ ؟

$$\begin{aligned}\varphi\left((a+ib)\times(c+id)\right) &=\varphi\left((ac-bd)+i(ad+bc)\right)\\ &=M(ac-bd,ad+bc)\\ &=M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)\\ &=\varphi(a+ib)\mathrm{T}\varphi(c+id)\end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو (E,T)

✓ لنبين أن $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=E^*$

- لدينا حسب إنشاء المجموعة E :

لكل M من E^* يوجد (a,b) من $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ بحيث : $M=M(a,b)$

إذن يوجد $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$ بحيث : $M=\varphi(a+ib)$

و منه : $\boxed{E^*\subset\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)}$

- حسب إنشاء التطبيق φ لدينا : $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)\subset E$

$$\begin{aligned}\varphi(a+ib)=O &\Leftrightarrow M(a,b)=M(0,0)\\ &\Leftrightarrow a=b=0\end{aligned}$$

إذن : لكل z من $\mathbb{C}^*$: $\varphi(z)\neq O$

و منه : $\boxed{\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)\subset E^*}$

ب)

- ✓ نعلم أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية ($(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي)

و لدينا φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو (E,T)

إذن $(\varphi(\mathbb{C}^*),\mathrm{T})$ هو زمرة تبادلية

و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ فإن (E^*,T) زمرة تبادلية

- ✓ نعلم أن 1 هو العنصر المحايد ل $(\mathbb{C}^*,\times)$

إذن $J=\varphi(1)$ هو العنصر المحايد ل $(\varphi(\mathbb{C}^*),\mathrm{T})$ أي ل (E^*,T)

$$J=\varphi(1)=\varphi((1)+i(0))=M(1,0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

4- أ) لنبين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في E

ليكن (a,b) و (c,d) و (e,f) من $\mathbb{R}^2$

$$M(a,b)\mathrm{T}(M(c,d)+M(e,f))=(M(a,b)\mathrm{T}M(c,d))+(M(a,b)\mathrm{T}M(e,f))\ ؟$$

$$\begin{aligned}M(a,b)\mathrm{T}(M(c,d)+M(e,f)) &= M(a,b)\mathrm{T}M(c+e,d+f)\\ &= M(a(c+e)-b(d+f);a(d+f)+b(c+e))\\ &= M(ac+ae-bd-bf;ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(M(a,b)\mathrm{T}M(c,d))+(M(a,b)\mathrm{T}M(e,f)) &= M(ac-bd,ad+bc)+M(ae-bf,af+be)\\ &= M(ac-bd+ae-bf;ad+bc+af+be)\end{aligned}$$

إذن لكل (a,b) و (c,d) و (e,f) من $\mathbb{R}^2$:

$$M(a,b)\mathrm{T}(M(c,d)+M(e,f))=(M(a,b)\mathrm{T}M(c,d))+(M(a,b)\mathrm{T}M(e,f))$$

ب)

- ✓ لدينا $(E,+)$ زمرة تبادلية
- ✓ و لدينا (E^*,T) زمرة تبادلية
- ✓ و "T"توزيعي بالنسبة ل "+" في E

و منه $(E,+,T)$ جسم تبادلي

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

-1

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-2(m+1+i)\right)^2-4(2)\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &=4(m+1+i)^2-8\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &=4\left(m^2+2(1+i)m+(1+i)^2\right)-8\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &=4\left(m^2+2(1+i)m+2i\right)-8\left(m^2+(1+i)m+i\right)\\ &=-4m^2\\ &=(2im)^2\end{aligned}$$

-2 لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

لدينا : $\Delta=(2im)^2$

إذن : $z=\dfrac{2(m+1+i)+2im}{2(2)}$ أو $z=\dfrac{2(m+1+i)-2im}{2(2)}$

إذن : $z=\dfrac{m+1+i+im}{2}$ أو $z=\dfrac{m+1+i-im}{2}$

إذن : $z=\dfrac{(m+1)+i(m+1)}{2}$ أو $z=\dfrac{(m+i)-i(m+i)}{2}$

إذن : $z=(m+1)\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$ أو $z=(m+i)\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$

و منه : $S=\left\{\left(\dfrac{1-i}{2}\right)(m+i),\left(\dfrac{1+i}{2}\right)(m+1)\right\}$

الجزء الثاني :

1- أ)

$$\begin{aligned} iz_2+1 &= i\left(\frac{1-i}{2}(m+i)\right)+1 \\ &= \frac{1+i}{2}(m+i)+1 \\ &= \frac{1+i}{2}\left[m+i+\frac{1}{1+i}\right] \\ &= \frac{1+i}{2}[m+i+1-i] \\ &= \frac{1+i}{2}(m+1) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

ب) لدينا :

$$\begin{aligned} z_1-\omega &= iz_2+1-\omega \\ &= iz_2+1-\frac{1+i}{2} \\ &= iz_2+\frac{1-i}{2} \\ &= i\left(z_2-\frac{1+i}{2}\right) \\ &= i\,(z_2-\omega) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}(z_2-\omega) \end{aligned}$$

إذن : M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $\omega=\frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ-2)

$$\frac{z_2-\omega}{z_1-\omega}=\frac{\left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i)-m}{\left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1)-m}$$

$$=\frac{(1-i)(m+i)-2m}{(1+i)(m+1)-2m}$$

$$=\frac{m+i-im+1-2m}{m+1+im+i-2m}$$

$$=\frac{1-m+i(1-m)}{1-m+im+i}$$

$$=\frac{i(m-1)(i-1)}{(m-i)(i-1)}$$

$$=\frac{i(m-1)}{m-i}$$

ب) نفترض أن M و M_1 و M_2 مستقيمية

إذن : $\frac{z_2-m}{z_1-m}\in\mathbb{R}$

إذن : $i\,\frac{m-1}{m-i}\in\mathbb{R}$

إذن : $\frac{m-1}{m-i}\in i\mathbb{R}$

إذن : $\arg\left(\frac{m-1}{m-i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

إذن : $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

إذن : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

و منه : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$

ج) نفترض أن Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

إذن $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}\times\frac{z_2-m}{z_1-m}\in\mathbb{R}$

لدينا : $\frac{z_2-m}{z_1-m}=i\,\frac{m-1}{m-i}$ و $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$

إذن : $i \times i \dfrac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

إذن : $-\dfrac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

إذن : $\dfrac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

إذن : M و A و B مستقيمية

إذن $M \in (AB)$ بحيث : $M \neq A$ و $M \neq B$

(عكسيا نبين أن إذا كان $M \in (AB)$ بحيث : $M \neq A$ و $M \neq B$ فإن Ω و M و M_1 و M_2 متداورة)

و بلتالي مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ωو M و M_1 و M_2 متداورة هي المستقيم(AB) محروما من النقطتين A و B

تصحيح التمرين الثالث

1- أ) ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5

نفترض أن $p \geq 2017$

لدينا الزوج (x,y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

إذن $px \geq 2017$ و $y^{p-1} \geq 1$

إذن $px + y^{p-1} \geq 2018$

إذن $2017 \geq 2018$ و هذا غير ممكن

و منه : $p < 2017$

ب) نفترض أن p يقسم y

إذن p يقسمy^{p-1}

إذن $(k \in \mathbb{N}^*)$ $y^{p-1} = kp$

و لدينا : $px + y^{p-1} = 2017$

إذن $px + kp = 2017$

إذن $p(x+k) = 2017$

إذن p يقسم2017

و بما أن p عدد أولي أكبر من أو يساوي 5 فإن $p = 2017$

و هذا تناقض مع كون $p < 2017$

و منه p لا يقسم y

ج)

- ✓ لدينا p عدد أولي و p لا يقسم y

إذن حسب مبرهنة فيرما : $y^{p-1} \equiv 1[p]$

- ✓ لدينا : $px \equiv 0[p]$ و $y^{p-1} \equiv 1[p]$

إذن $px + y^{p-1} \equiv 1[p]$

إذن $2017 \equiv 1[p]$

إذن $2016 \equiv 0[p]$

و منه p يقسم 2016

د) لدينا p يقسم 2016

إذن p يقسم $2^5 \times 3 \times 7$

إذن $p = 2$ أو $p = 3$ أو $p = 7$ (p عدد أولي)

و بما أن $p \geq 5$

-2

- ✓ إذا اكن $p \neq 7$: فحسب السؤال 1–) المعادلة لا تقبل حلا
- ✓ إذا كان $p = 7$:

المعادلة تصبح : $7x + y^6 = 2017$

بما أن $x \geq 1$ فإن $y^6 < 2017$

إذن $y < 4$

إذن $y \in \{1,2,3\}$ ($y \in \mathbb{N}^*$)

- إذا كان $y = 3$: المعادلة تصبح : $7x + 3^6 = 2017$

إذن $7x = 1288$

إذن $x = 184$

- إذا كان $y = 2$: المعادلة تصبح : $7x + 2^6 = 2017$

إذن $7x = 1953$

إذن $x = 279$

- إذا كان $y = 1$: المعادلة تصبح : $7x + 1 = 2017$

إذن $7x = 2016$

إذن $x = 288$

و بالتالي : $(x, y) \in \{(184,3);(279,2);(288,1)\}$

تصحيح التمرين الرابع

<u>الجزء الأول :</u>

1- أ) لنبين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

✓ لدينا : $f(0)=0$

✓

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{t\to-\infty}(1-t)e^{t}\\ &= \lim_{t\to-\infty} e^{t}-te^{t} \qquad \begin{pmatrix} t=\frac{-1}{x}\\ x\to 0^{+}\\ t\to-\infty\end{pmatrix}\\ &=0\end{aligned}$$

بما أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$ فإن الدالة f متصلة على اليمين في 0

ب) لنبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x}\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)e^{-\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(-t+t^{2}\right)e^{t} \qquad \begin{pmatrix} t=\frac{-1}{x}\\ x\to 0^{+}\\ t\to-\infty\end{pmatrix}\\ &= \lim_{t\to-\infty} -te^{t}+t^{2}e^{t}=0\end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و لدينا : $f'_{d}(0)=0$

ج)
✓

- $f_1 : x \mapsto 1+\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$
- $f_2 : x \mapsto -\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$f_2 : x \mapsto e^{x}$قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f_2(]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$

إذن $f_4 = f_3 \circ f_2 : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و بالتالي الدالة $f = f_1 \times f_4$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\
&= \left(1+\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(-1+1+\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

إذن $f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

2- أ) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$$\begin{pmatrix} t=-\dfrac{1}{x} \\ x\to+\infty \\ t\to 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0} e^{t}=1 \end{cases}$$: لأن

<u>التأويل الهندسي :</u> (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$

ب) جدول تغيرات f :

x	$0 \quad +\infty$
$f'(x)$	$0 \quad +$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

3- أ) لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad (\forall x\in\,]0,+\infty[)$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x\in\,]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \left(\frac{1}{x^3}\right)'e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \frac{-\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6}e^{\frac{-1}{x}}+\frac{1}{x^3}\times\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-3}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^5}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^5}e^{\frac{-1}{x}}(-3x+1) \end{aligned}$$

لدينا : $\dfrac{1}{x^5}e^{\frac{-1}{x}}>0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-3x+1$

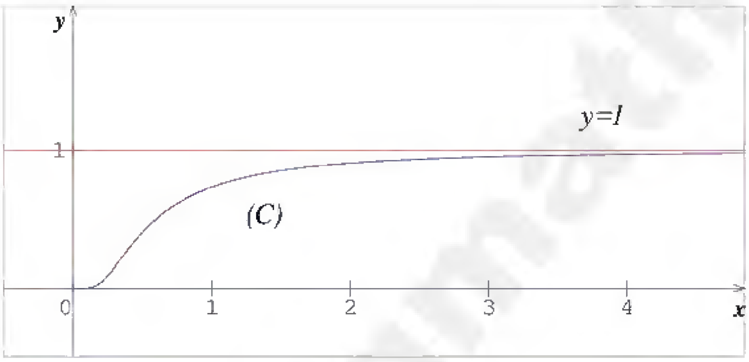
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

على المجال $\left]0,\frac{1}{3}\right[$: $f''(x)>0$

على المجال $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$: $f''(x)<0$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $\frac{1}{3}$ فإن النقطة $I\left(\frac{1}{3},4e^{-3}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)

ج)



<u>الجزء الثاني :</u>

1- ليكن $x\in[0,+\infty[$:

لدينا f متصلة على $[0,+\infty[$ ($1\in[0,+\infty[$ و $x\in[0,+\infty[$)

$x\mapsto x$ و $x\mapsto 1$ قابلتين للاشتقاق على $[0,+\infty[$

إذن F متصلة على $[0,+\infty[$

ملاحظة : ($F: x\mapsto \int_x^1 f(t)\,dt=-\int_1^x f(t)\,dt$)

2- أ) ليكن $x\in]0,+\infty[$:

$$\begin{cases} u(t)=e^{\frac{-1}{t}} \\ v'(t)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t^2}e^{\frac{-1}{t}} \\ v(t)=t \end{cases}$$

$$\int_x^1 e^{\frac{-1}{t}}dt=\left[te^{\frac{-1}{t}}\right]_x^1-\int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt$$

$$=e^{-1}-xe^{\frac{-1}{x}}-\int_x^1\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt$$

إذن : $\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

ب) ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{\frac{-1}{t}}dt = \int_x^1 e^{\frac{-1}{t}}dt + \int_x^1 \frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt$$

$$= e^{-1} - xe^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt + \int_x^1 \frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}dt$$

$$= e^{-1} - xe^{\frac{-1}{x}}$$

إذن : $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

ج) لدينا : $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{\frac{-1}{t}}dt = F(0)$

و بما أن F متصلة على اليمين في 0 فإن $F(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$

إذن : $F(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-1} - xe^{\frac{-1}{x}} = \lim\limits_{t\to -\infty} e^{-1} + \frac{1}{t}e^{t} = e^{-1}$

و منه : $\int_0^1 f(x)dx = e^{-1}$

3- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ و $x=2$ و $y=0$:

$$A = \int_0^2 |f(t)|dt \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

لدينا : $f(x) \geq 0 \quad (\forall x\ [0,2])$

إذن : $A = \int_0^2 f(t)dt \times 2cm \times 2cm$

إذن : $A = \left(\int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt\right) \times 4cm^2$

إذن : $A = \left(e^{-1} - \int_2^1 f(t)dt\right) \times 4cm^2$

إذن : $A = \left(e^{-1} - \left(e^{-1} - 2e^{\frac{-1}{2}}\right)\right) \times 4cm^2$

و منه : $A = 8e^{\frac{-1}{2}}cm^2$

4- أ) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

✓ F متصلة على المجال $[n,n+2]$

✓ F قابلة للاشتقاق على المجال $]n,n+2[$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : يوجد v_n من المجال $]n,n+2[$ بحيث :

$$F(n)-F(n+2)=F'(v_n).(n-n-2)$$

إذن : $F(n)-F(n+2)=-2F'(v_n)$

$$\left(F'(x)=\left(\int_x^1 f(t)dt\right)'=-\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=-f(x)=-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}} \right)$$

إذن لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n,n+2[$ بحيث : $u_n=2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

لدينا : $n\le v_n\le n+2$ و الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

إذن : $f(n)\le f(v_n)\le f(n+2)$

إذن : $\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}}\le\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}\le\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}$

و منه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\le u_n\le 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

ج) لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\le u_n\le 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}=2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}=2$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

<u>الجزء الثالث :</u>

1- أ) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

لنبين أن المعادلة $f(x)=e^{\frac{-1}{n}}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$

✓ لدينا f متصلة على $]0,+\infty[$

✓ و لدينا f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

✓ $e^{\frac{-1}{n}}\in f(]0,+\infty[)=]0,1[$

و منه لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة $f(x)=e^{\frac{-1}{n}}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$

و بالتالي : لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد a_n بحيث : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

لدينا : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$ و $f(a_{n+1})=e^{-\frac{1}{n+1}}$

و $f(a_{n+1})-f(a_n)=e^{-\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{-1}{n}}=e^{\frac{-1}{n}}\left(e^{-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}}-1\right)=e^{\frac{-1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)>0$

إذن : $f(a_{n+1})>f(a_n)$

و بما أن f تقابل تزايدي فإن f^{-1} أيضا تقابل تزايدي

إذن $f^{-1}(f(a_{n+1}))>f^{-1}(f(a_n))$

و منه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $a_{n+1}>a_n$

و بلتالي : $(a_n)_{n\geq 1}$ تزايدية

ج) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$:

لدينا :

$$f(a_n)=e^{\frac{-1}{n}} \qquad \Leftrightarrow \ln(f(a_n))=\frac{-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\times e^{\frac{-1}{a_n}}\right)=\frac{-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)+\ln\left(e^{\frac{-1}{a_n}}\right)=\frac{-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{1}{a_n}=\frac{-1}{n}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad -\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$

2- أ) ليكن $t\in[0,+\infty[$:

لدينا : $1-t-\frac{1}{1+t}=\frac{-t^2}{1+t}\leq 0$

إذن : $\boxed{1-t\leq\frac{1}{1+t}}$

و لدينا : $\frac{1}{1+t}-\left(1-t+t^2\right)=\frac{1-1+t-t^2-t+t^2-t^3}{1+t}=\frac{-t^3}{1+t}\leq 0$

إذن : $\boxed{\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2}$

و بالتالي : $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

ب) ليكن $x\in[0,+\infty[$:

لدينا : $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

إذن : $\int_0^x(1-t)dt\leq\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\leq\int_0^x\left(1-t+t^2\right)dt$

إذن : $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]\leq\left[\ln(1+t)\right]_0^x\leq\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x$

إذن : $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

و بالتالي : $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right)\quad -\frac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3- أ)

✓ لدينا : $f(1)=2e^{\frac{-1}{2}}$ و $f(a_4)=e^{\frac{-1}{4}}$

و $f(a_4)-f(1)=e^{\frac{-1}{4}}-2e^{\frac{-1}{2}}=e^{\frac{-1}{2}}\left(e^{\frac{3}{4}}-2\right)\geq 0$

إذن : $f(a_4)\geq f(1)$

و بما أن f تقابل تزايدي فإن f^{-1} أيضا تقابل تزايدي

إذن : $f^{-1}\left(f(a_4)\right)\geq f^{-1}\left(f(1)\right)$

و منه : $a_4\geq 1$

✓

- من أجل $n=4$:
  لدينا : $a_4\geq 1$
- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4
  - نفترض أن $a_n\geq 1$
  - و نبين أن $a_{n+1}\geq 1$

لدينا : $(a_n)_{n\geq 1}$ تزايدية إذن $\boxed{a_{n+1} \geq a_n}(1)$

و حسب الافتراض لدينا : $\boxed{a_n \geq 1}(2)$

من (1)و(2) نستنتج أن $a_{n+1} \geq 1$

- نستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1,2,3\}$: $a_n \geq 1$

ب) لدينا حسب نتيجة السؤال 2-ب) من الجزء الثالث : $-\dfrac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ $\quad (\forall x \in [0,+\infty[)$

نأخذ $x = \dfrac{1}{a_n}$:

إذن : $-\dfrac{1}{2a_n^2} \leq -\dfrac{1}{a_n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) \leq -\dfrac{1}{2a_n^2} + \dfrac{1}{3a_n^3}$

و لدينا حسب نتيجة السؤال 1-ج) من الجزء الثالث : $-\dfrac{1}{a_n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) = -\dfrac{1}{n}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $-\dfrac{1}{2a_n^2} \leq -\dfrac{1}{n} \leq -\dfrac{1}{2a_n^2} + \dfrac{1}{3a_n^3}$

إذن : $-\dfrac{1}{2} \leq -\dfrac{a_n^2}{n} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3a_n}$

إذن : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3a_n} \leq \dfrac{a_n^2}{n} \leq \dfrac{1}{2}$

و منه : $1 - \dfrac{2}{3a_n} \leq \dfrac{2a_n^2}{n} \leq 1$

ج)

✓ لدينا : $a_n \geq 1$

إذن $3a_n \geq 3$

إذن : $\dfrac{2}{3a_n} \leq \dfrac{2}{3}$

إذن : $-\dfrac{2}{3a_n} \geq -\dfrac{2}{3}$

إذن : $\dfrac{1}{3} \leq 1 - \dfrac{2}{3a_n}$

و بما أن $1-\frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n}$

فإن : $\frac{1}{3} \leq \frac{2a_n^2}{n}$

إذن : $\frac{n}{6} \leq a_n^2$

و منه : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$

✓ لدينا : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{6}} = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

د) لدينا : $1-\frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$

إذن : $\boxed{\sqrt{1-\frac{2}{3a_n}} \leq a_n\sqrt{\frac{2}{n}} \leq 1}$ ($1-\frac{2}{3a_n} \geq 0$)

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = 0$ و منه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{3a_n}} = \sqrt{1} = 1}$

و التلي حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}} = 1$

つづく