COLLEGE LIBERMANN_DOUALA
B.P. 5351 Tél. 33 42 28 90

Année scolaire 2006 / 2007

*5ème Séquence / Baccalauréat Blanc _ Session de mars 2007*

| Tle C | ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES | Durée : 4H |
|---|---|---|

*L'épreuve comporte trois exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 3. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.*

## EXERCICE 1 : 3 Points

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de la classe de Terminale C du Collège selon leurs moyennes (arrondies à l'unité près) du 1er trimestre.

| Moyennes | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de garçons | 1 | 4 | 8 | 2 | 1 |
| Nombre de filles | 0 | 0 | 5 | 2 | 2 |

On représente le nom de chacun des élèves par un numéro de 1 à 25. On inscrit les 25 numéros sur des jetons indiscernables au toucher que l'on met dans un sac.
On tire successivement trois jetons en remettant Chaque fois le jeton tiré dans le sac.
Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à chaque triplet de jetons tirés le nombre d'élèves ayant obtenu moyenne (arrondie à l'unité près) supérieure ou égale à 10.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. 1,5 pt
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. 1,5 pt
   N.B : On donnera les résultats sous la forme de fraction irréductible.

## EXERCICE 2 : 3,5 Points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$. 1,5 pt
   On donnera les solutions sous la forme algébrique.
2. On désigne par A, B et C les images dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé, des solutions de (E) ; (D) la droite d'équation $x = 3$ et $(\Gamma)$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 12 + \frac{3}{4}(x-3)^2$.
   Calculer la distance du point M à la droite (D) puis déterminer et construire $(\Gamma)$. 2 pts

## EXERCICE 3 : 2,5 Points

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B tels que AB = 6 cm.
On désigne par :

- C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
- S la similitude directe qui transforme A en B et C en D. On note I son centre.

1. Calculer $\frac{IA}{IB}$ et donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$. 1 pt
2. En déduire la construction géométrique du point I. 1 pt
3. Démontrer que le point I appartient au cercle circonscrit au triangle ADC. 0,5 pt

**Problème : 11 Points**

La Partie A est indépendante des parties B et C.

**Partie A :**

On considère dans IN*x IN*, l'équation ( E ) : $50x - 11y = 3$.

1. a. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD des couples *(x, y)* solutions de l'équation E ? 0.25 pt
   b. Résoudre l'équation ( E ). 0,75 pt
2. Soit *n* un entier naturel non nul, on pose : a = 11n + 3 et b = 13n-1.
   a. Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50. 0,25 pt
   b. En s'inspirant de la question 1.b., déterminer les valeurs de *n* pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 50. 0,75 pt
   c. Déterminer les valeurs de *n* pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 25. 1 pt

**Partie B :**

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle ] 0 ;+∞ [ par : $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

On désigne par $\Gamma$ la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé (O, I , J).

1. a. Justifier que *f* est dérivable sur ] 0 ; +∞[ et calculer *f'(x).* 0,5 pt
   b. En déduire le sens de variation de *f.* 0,25 pt
2. a. Pour $x > 0$, Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ à l'aide d'une intégration par parties. 0,5 pt
   b. Démontrer que pour tout $t > 1$, $\frac{\ln t}{2t^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$.
   c. En déduire que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$. 0,25 pt
   d. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, donner un encadrement de *l*. 0,25 pt
3. Soit *g* la fonction définie sur ] 0 ; +∞[ par $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{x})$ .
   a. Démontrer que *g* est la fonction nulle sur ] 0 ;+∞ [ 1 pt
   b. En déduire la limite de *f* en zéro. 0,5 pt
   c. Tracer l'allure de la courbe $\Gamma$. 0,5 pt

**PARTIE C :**

Pour tout entier naturel non nul *n,* on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.

1. a. Démontrer que $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. 0,25 pt
   b. En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et donner sa limite. 0,25 pt
   c. En remarquant que, pour tout x de [0 ; 1] on a : $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$.
      Calculer : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$. 0,25 pt
   d. Calculer $U_n$ au moyen d'une intégration par parties. 0,5 pt
2. Pour tout *x* de [ 0 ; 1] et pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n(x) = 1 - x + ..... + (-1)^n x^n$.
   a. Démontrer que : $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$. 0,25 pt
   b. Démontrer que : $1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$. 0,75 pt
   c. Démontrer que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$. 1 pt
   d. En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 x^2 \ln(1+x)$. 0,25 pt
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$. 0,75 pt