MINESEC/ DPL/ IPP-SC

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Année scolaire 2006 / 2007

ÉVALUATIONS HARMONISÉES DE LA 5è SÉQUENCE		CLASSE	Tle	DURÉE	4H
ÉPREUVE	*MATHÉMATIQUES*	SÉRIE	E	COEF.	4

Exercice 1 (4 points)

I.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynôme Q_n définie par :
$Q_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$ et P_n sa restriction sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. 0,75 pt

   b) Montrer que $\alpha_n \in\ ]0\ ;\ 1[$. 0,25 pt

2. a) Montrer que $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$
   (α_{n+1} étant l'unique solution de l'équation $P_{n+1}(x) = 0$ dans $]0\ ;\ +\infty[$). 0,5 pt

   b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et convergente. 0,5 pt

II.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\, 2^{k-1}$

1. a) Calculer U_1 et U_2 0,5 pt

   b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,
   $\sum_{k=1}^{n} k\, 2^{k-1} = 2^n(n-1) + 1$ 0,75 pt

2. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente, de limite $+\infty$. 0,75 pt

Exercice 2 (3,75 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
(E) : $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3})$

1. Résoudre l'équation (E) et exprimer les solutions z' et z" en fonction des nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$ et $b = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ 1,25 pt

2. a) Mettre a et b sous forme trigonométrique, puis représenter leurs points images respectifs A et B dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$. 1 pt

   b) En déduire une construction simple des points M' et M" images des nombres complexes z' et z" respectivement. 0,5 pt

3. Mettre z' et z" sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$ 1 pt

Exercice 3 (2,25 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}\ (x\ ,\ y\ ,\ z)$ associe le vecteur

$\vec{u'}$ (x' , y' , z') tel que $\begin{cases} x' = -x + 2z \\ y' = y + 2z \\ z' = 2x + 2y \end{cases}$

1. Démontrer que le noyau de f est une droite vectorielle E_1 de E dont on déterminera une base ($\vec{e_1}$) 0,75 pt

2. Démontrer que l'image de f est un plan vectoriel E_2 de E dont on déterminera une base ($\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$). 0,75 pt

3. a) Montrer que ($\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$) est une base de E. 0,5 pt
   b) Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 ? 0,25 pt

Problème (10 points)

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A (4,5 points)

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Unité graphique 2 cm
Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x , y) associe le point M'(x' , y')
tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}\,x + y \end{cases}$

1. a) Déterminer l'écriture complexe de f. 0,5 pt
   b) En déduire que f est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. 0,75 pt

2. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}\,x\,y = 64$ et (Γ')son image par f.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ') 0,75 pt
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ') 0,75 pt
   c) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. 0,75 pt
   d) Construire (Γ') et (Γ) dans le plan. 1 pt

Partie B (5,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O,$\vec{I}$, $\vec{J}$)

I.

Soit la fonction numérique f définie sur ℝ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|+x^2}}$

1. Vérifier que f est une fonction paire. 0,25 pt
2. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[et étudier le signe de f(x)pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ 1 pt

II.

On considère la fonction numérique F : $\mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+|t|+t^2}}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan et (D) la droite d'équation y = x.

1. a) Justifier que F est définie et dérivable sur ℝ. 0,25 pt

b) Démontrer que F est une fonction impaire. 0,5 pt

2. a) Démontrer que pour tout nombre réel positif t, $f(t) \geq \frac{1}{1+t}$.
   En déduire que pour tout nombre réel positif x , $F(x) \geq \ln(1+x)$. 0,5 pt

   b) Déterminer la limite de F en $+\infty$. 0,25 pt

3. Calculer $F'(x)$, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variation de F. 0,5 pt

4. a) Démontrer que pour tout nombre réel positif t, $f(t) \leq 1$.
   En déduire que pour tout nombre réel positif x , $F(x) \leq x$ 0,5 pt

   b) Donner une interprétation graphique de ce résultat. 0,25 pt

5. a) Démontrer que pour tout nombre réel t élément de $[1\ ;\ +\infty[$, $f(t) \leq \frac{1}{t}$ 0,25 pt

   b) En déduire que pour tout nombre réel $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $F(x) \leq \int_0^1 f(t)\,dt + \ln x$ 0,5 pt

6. a) Démontrer que (C) admet une branche parabolique. 0,25 pt

   b) Tracer (D) et donner l'allure générale de (C). 0,5 pt