

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 3
		Coefficient : 6

L'épreuve comporte quatre exercices obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

**EXERCICE 1** : /6,5 pts

- Démontrer par récurrence que  $4^n + 6n - 1$  est divisible par 9. (1 pt)
- Prouver par récurrence qu'à partir d'un certain rang que l'on précisera, l'inégalité suivante :  $3^n < n!$  (1 pt)

3. Calculer la limite de la suite suivante :  $U_n = \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$ . (0,5 pt)

4. La suite  $(U_n)$  est définie par :  $U_0 = a (a > 0)$  et  $U_{n+1} = \sqrt{U_n}$

a) Pour  $a > 1$  :

- démontrer que la suite  $(U_n)$  est strictement décroissante. (0,5 pt)
- Etablir que, pour tout entier naturel  $n$  :  $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$  (0,5 pt)
- En déduire la limite de la suite  $U_n$ . (0,5 pt)

b) Pour  $a = 1$  :

- Prouver que la suite  $(U_n)$  est constante. (0,5 pt)
- Préciser sa limite. (0,5 pt)

c) Pour  $0 < a < 1$  :

- Démontrer que la suite  $(U_n)$  est strictement croissante. (0,5 pt)
- Etablir que, pour tout entier naturel  $n$  :  $|1 - U_{n+1}| \leq \frac{1}{1+a}|1 - U_n|$  (0,5 pt)
- En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ . (0,5 pt)

**EXERCICE 2** : /3,5 pts

1.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs tels que :  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$  ;  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

- Vérifier que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont unitaires. (0,5 pt)
- Déterminer le vecteur  $\vec{w}$  tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormale. (0,5 pt)

2. Soit trois vecteurs non coplanaires  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  ; nous nous proposons de construire par la méthode d'Ehrard Schmidt une base orthonormale de l'espace.

- Soit  $\vec{u}' = \vec{u}$  et  $\vec{v}' = k\vec{u} + \vec{v}$  où  $k \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $k$  pour que les vecteurs  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  soient orthogonaux. (0,5 pt)
- Soit  $\vec{w}' = a\vec{u}' + b\vec{v}' + \vec{w}$  où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $\vec{w}'$  soit orthogonal à  $\vec{u}'$  et à  $\vec{v}'$ . La base  $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$  est donc orthogonale. (1 pt)
- Soit  $\vec{u}(2; -1; -2)$  ;  $\vec{v}(1; -1; 1)$  et  $\vec{w}(2; 1; -3)$ . Calculer  $\vec{u}', \vec{v}'$  et  $\vec{w}'$  en choisissant les vecteurs unitaires colinéaires à  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  en déduire une base orthonormale de l'espace. (1 pt)

**PROBLEME** : /10 pts

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

A.1. On prend pour point  $M_0$  l'origine O du repère ; soit alors  $M_1$  le point du plan P tel que  $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i}$ . On fixe un nombre réel  $r > 0$  et un nombre réel  $\theta$  dans  $R - \{k\pi, k \in Z\}$ . Soit  $M_2$  le point du plan P tel que  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r\|\overrightarrow{M_0M_1}\|$  et  $(\overrightarrow{M_0M_1}; \overrightarrow{M_1M_2}) = \theta$ . Calculer l'affixe  $V_0$  du vecteur  $\overrightarrow{M_0M_1}$  et l'affixe  $V_1$  du vecteur  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . (1 pt)

2.- Les points  $M_0, M_1, M_2$  ayant été définis ci-dessous pour tout  $n \geq 1$  dans N on définit le point  $M_{n+1}$  à partir des points  $M_{n-1}$  et  $M_n$  par  $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = r\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\|$  et  $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}; \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta$ . On obtient ainsi une suite de points  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  et la figure obtenue en traçant les segments  $[M_0M_1]; [M_1M_2] \dots [M_nM_{n+1}] \dots$  est appelé « polygone »

a) Montrer que  $\forall n \geq 1 \quad V_n = re^{i\theta}V_{n-1}$ . (1,5 pt)

b) Déduisez-en pour tout entier naturel  $n \geq 0$  l'expression de  $V_n$  en fonction de n, r et  $\theta$ . (1 pt)

c) Dans cette question on suppose  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Calculez  $V_n$  pour  $0 \leq n \leq 3$  et placez les points  $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$  en prenant 8 cm comme unité de longueur. (1 pt x 2)

B.- Dans toute la suite du problème on propose  $0 < r < 1$  et pour tout  $n \geq 0$  on note  $Z_n$  l'affixe du point  $M_n$ .

1. Calculez  $Z_0; Z_1$  et  $Z_2$ . (0,5pt x 3)

2. Pour tout  $n \geq 0$ , exprimez  $V_n$  en fonction de  $Z_n$  et  $Z_{n+1}$ ; déduisez-en que pour tout  $n \geq 1$ ;  $Z_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ . (0,5pt x 3)

3. On rappelle que pour tout nombre complexe  $Z \neq 1$  :

$1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{n-1} = \frac{1 - Z^n}{1 - Z}$ . Calculez pour tout  $n \geq 0$   $Z_n$  en fonction de n, r et  $\theta$ . (0,5 pt)

4.a) Démontrez que le module du nombre complexe  $Z_n - \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$  tend vers 0 quand n tend vers  $+\infty$ . (0,5 pt)

b) On note  $\Omega$  le point du plan P d'affixe  $w = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$ . Interprétez géométriquement le résultat de la question a). (1 pt)