COLLEGE ALFRED SAKER
B.P. 8038

Année scolaire 2006 / 2007

1ère Séquence

Tle C	INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES (Initiation à l'arithmétique)	Durée :

EXERCICE 1 : 2,5 Points

1. Écrire la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 50
2. Le nombre 1517 est-il premier ?
3. Déterminer tous les entiers naturels a et b vérifiant l'égalité $a^2 = b^2 + 1517$

EXERCICE 2 : 5,5 Points

On pose pour tout entier naturel n, $S_n = 2^n + 5^n + 7^n$

1. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que S_n soit un nombre premier
2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de 2^k par 9						
Reste de la division de 5^k par 9						
Reste de la division de 7^k par 9						

3. Déterminer le plus petit entier non nul k tel que S_k soit divisible par 9.
4. Montrer que 9 divise $S_{n+6} - S_n$
5. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 6. Démontrer que $S_n \equiv S_1 (9)$
6. Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles S_n est multiple de 9.

EXERCICE 3 : 4 Points

On définit la suite (U_n) par $U_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n - 3$

1. On pose $V_n = U_n - 3$. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de Vn puis de Un en fonction de n.
2. Déterminer toutes les valeurs de n telles que $3^{U_n} - 1$ soit un multiple de 11

EXERCICE 4 : 3 Points

On se propose de résoudre l'équation (E) : $3x^2 - 7y^2 = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. On suppose que le couple d'entiers (x , y) vérifie $3x^2 - 7y^2 = 4$.
   Démontrer que $y^2 \equiv 2(3)$
2. Soit a un entier relatif, quelles sont les restes possibles de la division de a^2 par 3 ?
3. Quel est l'ensemble solution de l'équation (E) ?

EXERCICE 5 : 5 Points

On admet que : <u>si un nombre premier divise un produit de facteurs alors il divise l'un des facteurs du produit</u>.
Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits en base 10 sous la forme abba où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un entier quelconque. Le but de l'exercice est de déterminer **le nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.**

1. a. Quel est le nombre d'éléments de E ?
   b. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers
   c. Démontrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisible par 2 ni par 5 ?
   b. Montrer qu'un élément de (E) est divisible par 3 si et seulement si a + b est divisible par 3
   c. Montrer qu'un élément de (E) est divisible par 7 si et seulement si b est un multiple de 7
3. Déduire des questions précédentes le nombre d'élément de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.