INTITUTIONS SCOLAIRES DAUPHINES
COLLEGE BILINGUE FÖ KAMGA Tel : 340 94 99
COLLEGE DAUPHINE II Tel: 337 51 53

Année scolaire 2006/2007

Terminales C	Devoir surveillé de mathématiques Evaluation de la $2^{ème}$ séquence	Durée : 3 heures Coefficient : 6

EXERCICE 1 : 5,25 points

Les exercices I et II sont indépendants.

I- 1) Etudier les restes des divisions euclidiennes par 9 des puissances successives de 2. 0,5pt
En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{1999} par 9. 0,5pt

2) Démontrer de deux façons que pour tout entier naturel n, $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1$ est divisible par 9 :
a) par récurrence. 0,75pt
b) en utilisant les congruence. 0,75pt

II- Soit n entier naturel , on considère l'entier $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

1) Démontrer que l'on a : pour tout entier naturel n $A_{n+3} \equiv A_n[7]$. 0,75pt
2) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que A_n soit divisible par 7. 0,5pt
3) Soit a , b , c entiers naturels tels que a = $\overline{1110}$, b = $\overline{1010100}$ et c = $\overline{1001001000}$ en base deux .
Ces nombres sont-ils divisibles par 7 ? 1,5pt

EXERCICE 2 : 3,75 points

Soit f fonction définie sur]0 , +∞[par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{x}$.

1) Justifier la dérivabilité de f, puis calculer f '(x). 0,25pt + 0,25pt
2) Donner le sens de variation de f ' sur l'intervalle]0 , + ∞[. 0,5pt
3) Soit A le point de la courbe (C_f) d'abscisse 1.
Donner une équation de la tangente (T_A) en A à (C_f). 0,25pt
4) On pose $\varphi(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$.
Montrer que, pour tout x > 0, $\varphi'(x) = f'(x) - f'(1)$. 0,25pt
Déterminer le signe de φ' sur]0 , + ∞[. 0,75pt
Déterminer alors les variations de φ et le signe de φ sur]0 , + ∞[. 0,5pt + 0,5pt
En déduire la position de (C_f) par rapport à la tangente (T_A) sur]0 , + ∞[. 0,5

EXERCICE 3 : 4,25 points

Soit la fonction f, définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f. 0,25pt
Ecrire f(x) sans le symbole de valeur absolue. 0,25pt
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. 0,5pt+0,5pt
4) Etudier les variations de f et tracer sa courbe. 1,25pt
5) Montrer que f est induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera. 0,5pt
Tracer la courbe de la réciproque de f. 0,5pt
Vérifier que la fonction réciproque de f est la fonction $x \to |x|x$. 0,5pt

EXERCICE 4 : 3,25 points

On considère dans le plan complexe les points O d'affixe zéro, A d'affixe 1, B d'affixe –1.

A tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1)a) Etablir que $|z'| = 1$. Interpréter géométriquement ce résultat. 0,75pt

b) Etablir que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel. Interpréter géométriquement ce résultat. 0,75pt

c) Etablir que $\frac{z'+1}{z-1}$ est un imaginaire pur. Interpréter géométriquement ce résultat. 0,75pt

2) Donner la construction géométrique de M' connaissant M. 1pt

<u>EXERCICE 5 :</u> **4 points**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

On note C', d'affixe c', l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, B', d'affixe b', l'image B par la rotation de centre A et d'angle - $\frac{\pi}{2}$ et C'', d'affixe c'', image de C par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Faire une figure. 0,75pt

1) Exprimer c', b' et c'' en fonction de a, b et c. 2,25pt

2) En déduire que les droites (AC'') et (B'C') sont perpendiculaires et que B'C' = 2AC''. 1 pt