Powered by www.educamer.net document téléchargé sur grandprof.net

COLLEGE CHEVREUL
BP 4093 Douala

Année scolaire 2006 / 2007

2ème Séquence _ novembre 2006

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4 Coefficient : 5

L'épreuve comporte trois exercices et un problème obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 — 3 points

Théorème de Fermat : « Si P est premier et a un entier naturel premier avec P alors $a^{P-1} \equiv 0\ [P]$ »

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, 4^n est congru à 1 modulo 3. — 0,75 pt
2. En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $4^{28} - 1 \equiv 0\ [29]$ — 0,75 pt
3. Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division euclidienne de 4^n par 17.
   En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$. $4^{4k} - 1$ est divisible par 17. — 0,5 pt
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5. — 0,5 pt
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$. — 0,5 pt

Exercice 2 — 4 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points

$A\begin{pmatrix}3\\0\\10\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix}$

1. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB). — 0,5 pt

   b) Montrer que (AB) coupe l'axe $(O, \vec{i})$ au point $E\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}$. — 0,5 pt

   c) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. — 0,5 pt

2. Soit H le pied de la hauteur de O dans le triangle OBC.

   a) Montrer que (BC) est perpendiculaire à (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de (E) dans le triangle EBC. — 0,5 pt x 2

   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH). — 0,5 pt

   c) Montrer que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne
   $20x + 9y + 12z - 180 = 0$ — 0,5 pt

   d) Montrer que le système $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ admet une solution unique que représente cette solution ? — 0,5 pt

   a) Calculer OH. En déduire que EH = 15 puis l'aire du triangle EBC.

Exercice 3 — 3 points

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct ABC.
On note A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [CA] et [AB].
On construit les triangles rectangles isocèles ACP ; BAQ et CBR tels que :

grandprof .net infos concours education epreuves examens

Powered by www.educamer.net document téléchargé sur grandprof.net

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = (\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On se propose de démontrer quelques propriétés de cette configuration.

1. a) On désigne par :
   - r_P rotation de centre P d'angle $\frac{\pi}{2}$; r_Q rotation de centre Q d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   - $S_{A'}$ la symétrie de centre A'.

   b) Etudier l'image A par l'application $f = r_Q \circ S_{A'} \circ r_P$, que peut-on dire de f. 0,5 pt x 2

   c) Quelle est la nature du triangle A'PQ ? 0,5 pt

2. a) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer r(P) et r(R).
   En déduire que PR = QC et que les droite (PR) et (QC) sont orthogonales. 1 pt

   b) Démontrer que les droites (AR) ; (BP) et (CQ) sont concourantes. 0,5 pt

Problème **10 points**

Partie A :

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z^2 + 1}{2z}$; $(z \neq 0)$

puis l'on pose $z = x + iy$ et $z' = X + iY$ (x, y, X, Y réels)

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y. 1 pt

2. R étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, on suppose :
   M(z) un point du cercle (C) de centre O et de rayon R ;
   θ nombre réel de $[0,\pi]$ est tel que $\theta = \text{mes}\,(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

   a) Vérifier que $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$. 0,5 pt

   b) Déduire de la question 1, les expressions de X et Y en fonction de R et de θ. 1 pt

3. a) Ecrire une relation indépendante entre X et Y indépendante de θ. 1 pt

   b) En déduire que lorsque M décrit (C), l'ensemble des points M' d'affixe z est une conique dont on précisera la nature. 1 pt

   c) On suppose dans cette question R = 2, tracer la conique obtenue en faisant apparaître ses foyers et directrices. 1 pt

Partie B :

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$.

1. Etudier f : (limites – dérivées – sens de variations et tableau de variation).
   On note (C_f) sa courbe. 1 pt

2. a) Montrer que la droite d'équation y = x est une asymptote à (C_f). 0,5 pt

   b) Représenter (C_f). 1 pt

3. a) Soit $g(x) = -f(x)$; par quelle transformation peut-on déduire (C_g) de (C_f). 0,5 pt

   b) Représenter alors (C_g) dans le même repère. 0,5 pt

4. En faisant la réunion de (C_g) et (C_g), on trouve une conique dont on donnera l'équation caractéristique ainsi que les différents éléments. 1 pt

grandprof .net infos concours education epreuves examens