LYCEE JOSS DOUALA — Année scolaire 2006 / 2007

2ème Séquence _ 21 novembre 2006

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4 Coefficient :

ANALYSE

Exercice 1 5,25 points

Le repère (O, I,J) est orthonormé. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que f est continue et dérivable en 1 — 0,75 pt

   b) Calculer les limites de faux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches de la courbe représentative (C) de f. — 0,75 pt

   c) Etudie les variations de f. — 0,75 pt

   d) Vérifié que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C) puis tracer la courbe (C), — 0,75 pt

2. Soit h le restriction de f à l'intervalle $]1\ ;+\infty[$.

   a) Démontrer que h réalise une bijection d<: $]1\ ;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. — 0,5 pt

   b) En décuire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.
   Tracer la courbe représentative de h^{-1} — 0,75 pt

Exercice 2 1 points

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur des intervalles que l'on précisera — 1 pt

$f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$; $g(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x \cos x}$; $h(x) = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $t(s) = \dfrac{1}{x\ln x}$

Exercice 3 La fonction arctangente4,75 points

Nous admettons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

1. Parité

   a) Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) + f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée — 0,5 pt

   b) Calculer g(0).
   En déduire que la fonction f est impaire. — 0,5 pt

2. Limite en $+\infty$

a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et calculer sa dérivée — 0,5 pt

b) En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$, on ait $f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right)$ 0,25 pt

c) A l'aide de 1.), prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$ 0,25 pt

3. On considère la fonction u définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \tan x$

a) Montrer que la fonction $t : x \mapsto f \circ u\,(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée 0,5 pt

b) Calculer t(0) et en déduire que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f(\tan x) = x$ 0,5 pt

c) Calculer la valeur exacte de $f(1)$, $f(\sqrt{3})$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ainsi que la valeur exacte de c 0,5 pt

4. a) Etudier le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations 0,5 pt

b) A l'aide des renseignements précédents, tracer la courbe (C) de f.
On précisera les asymptotes et la tangente à l'origine. 0,75 pt

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice 1 2 points

1. a) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et par 9. 0,5 pt

b) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11. 0,5 pt

c) Un nombre s'écrit $\overline{1x1yxy}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 63. 0,5 pt

2. a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $A = n^2 - n + 1$. 0,25 pt

b) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $B = (2753)^2 - 2753 + 1$. 0,25 pt

Exercice 2 2 points

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a. Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace (E_0) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 6MD^2 = 6a^2$.

1. Montrer que $(\Gamma) \neq \varnothing$ 0,25 pt

2. Montrer que $(\Gamma) \neq (E_0)$ 0,25 pt

3. a) Que peut-on dire du vecteur $\vec{U}_0 = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MD}$? 0,25 pt

b) Déterminer (Γ). 1,25 pt

Exercice 3 **1,5 point**

Soit (P) le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A et A' les points images des solutions de l'équation $z^2 + 2z + 5 = 0$
tels que $\text{Im}(z_A) > 0$.

1. Soit B l'image de A par le quart de tour direct de centre O. Calculer z_B. 0,5 pt

2. a) Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M d'affixe z tels que : $\left|\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right| = 1$ 0,5 pt

   b) Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M d'affixe z tels que : $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ 0,5 pt

Exercice 4 **1 point**

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct.
Soit $\vec{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k})$; $\vec{J} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ et $\vec{K} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$

Etudier si $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormale directe ou indirecte. 1 pt

Exercice 5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de (E). Soit A le point défini par
$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

A tout point de (E) on associe M' défini par : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM}$.

1. Existe-t-il des points M invariants par cette transformation ?
2. Donner la définition analytique de cette transformation.
3. Montrer que pour tout point M n'appartenant pas à 1 droite (OA),
   i) La droite (MM') est orthogonale au plan (MOA).
   ii) Li. longueur MM' est proportionnelle à la distance de M à (OA).

Exercice 6 **1,5 point**

On rappelle que le p.g.c.d de deux entiers relatifs a et b est l'entier naturel d tel que
$au + bv = d$; $u, v \in \mathbb{Z}$

1. Démontrer que : si $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ alors p.g.c.d (a, b) = p.g.c.d (b, r). 0,5 pt
2. Soit n un entier naturel supérieur à 1.
   Déterminer p.g.c.d $(n - 1 ; n + 1)$ et p.p.c.m $(n - 1 ; n + 1)$. 1 pt

A Méditer :

« But only a few people have an idea of the impact which pyramids have had on the growth of civilisations; ... there is some force that defies the laws of science at work in the pyramid. »
MAX TOTH and GREG NIELSON in Pyramid Power P. 12