COLLEGE LIBERMANN_DOUALA
B.P. 5351 Tél. 33 42 28 90

Année scolaire 2006 / 2007

*2ème Séquence / Devoir surveillé N°02 _ 17 novembre 2006*

| Tle C | ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES | Durée : 4H |
| --- | --- | --- |

## EXERCICE 1 : 2,5 Points (30 min)

ABC est un triangle du plan tel que AB = 2 ; AC = 4 et BC = 3.

1- Construire le triangle ABC et le point G barycentre des points pondérés $\left(A;\frac{11}{4}\right)$, $\left(B;-\frac{4}{3}\right)$ et $\left(C;\frac{7}{3}\right)$. 0,5pt

2- Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{11}{4}MA^2-\frac{4}{3}MB^2+\frac{7}{3}MC^2=32$

2.1- Démontrer que les points A, B et C appartiennent à $(\Gamma)$. 0,75pt

2.2- Déterminer $(\Gamma)$. 0.5pt

2.3- En déduire la valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. 0,75pt

## EXERCICE 2 : 3,5 Points (40 min)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f la transformation du plan qui, à tout point M de coordonnées (x ; y) associe le point M' de coordonnées (x' ; y') telles que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - y) \\ y' = \frac{1}{2}(x - y\sqrt{3}) \end{cases}$.

1- On pose z = x + iy et z' = x' + iy'. Exprimer z' en fonction de z et déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques. 1pt

2- On définit une suite de points $(M_n)$ de la manière suivante : $M_0$ est le point d'affixe i et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par $z_n$ l'affixe du point $M_n$.

2.1- Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i(\pi/2 + 5n\pi/6)}$. 0,5pt

2.2- Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Montrer que deux points $M_n$ et $M_p$ sont confondues si, et seulement si n- p est un multiple de 12. 0,5pt

3- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : 12x – 5y = 3. 0,5pt

4- En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $M_n$ appartienne à la demi-droite [Ox). 1pt

## EXERCICE 3 : 4,5 Points (55 min)

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B tels que AB = 6 cm.

1- Résoudre dans C l'équation (E) : $z^3 - (2 + 5i)z^2 + (-7 + 11i)z + 12 + 12i$, sachant qu'elle admet une racine réelle. 1pt

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 4i, -1+i et 3 ; r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On construit à l'extérieur du triangle ABC des triangles équilatéraux directs AEB, BFC et CGA. On appelle S le point d'intersection de la droite (BG) et du cercle circonscrit au triangle CGA

2.1- Faire une figure. 0,5pt

2.2- Déterminer l'affixe du point E. 0,25pt

2.3- Démontrer que le point S appartient également aux cercles circonscrits aux triangles AEB et BFC. 1pt

2.2. Démontrer que les points C, S et E sont alignés. 0,5pt

2.3. Démontrer que l'image de S par r appartient à la droite (BG). 0,5pt

2.4. En déduire que SA + SB + SC = BG. 0,75pt

**Problème :** 9,5 Points (1H40 min)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2 cm).

D désigne l'intervalle ]1 ;+∞[. $f$ est la fonction définie sur D par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

(C) désigne la courbe représentative de $f$ dans le repère (O, I, J)

**Partie A :**

1. a. Déterminer les limites de f aux bornes de D. 0.5 pt
   b. Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur D. 0.5 pt
   c. Justifier que f est une bijection de D vers un ensemble à déterminer 0.25 pt
   d. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2};2\right[$. 0.25 pt
2. a. Déterminer les branches infinies à (C). 0.5 pt
   b. Construire (C). 0.5 pt

**Partie B :**

On considère l'intervalle I = $\left[\frac{3}{2};2\right]$ et la fonction g définie sur I par g(x) = $\frac{2x^2+x+1}{x^2}$

1. a. Etudier les variations de f. 0.5 pt
   b. Montrer que g(I) $\subset$ I. 0.25 pt
   c. Démontrer que g($\alpha$) = $\alpha$ ; 0.5 pt

   On admet que pour tous réels a et b de I, $|g(a)-g(b)| < \frac{1}{2}|a-b|$
2. On définit la suite ($t_n$) par $t_0$ = 2 et pour tout entier n de IN, $t_{n+1} = g(t_n)$
   a. Calculer $t_1$ et $t_2$ (on donnera les valeurs approchées à $10^{-3}$). 0.5 pt
   b. Montrer que pour tout entier n de IN, $t_n \in$ I. 0.25 pt
   c. Démontrer que pour tout entier n de IN, $|t_{n+1}-\alpha| < \frac{1}{2}|t_n-\alpha|$ 0.25 pt
   d. Démontrer que pour tout entier n de IN, $|t_n-\alpha| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 0.5 pt
   e. Calculer $t_4$ et justifier que $t_4$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$. 0.5 pt

**Partie C :**

Soit les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par $U_0 = \frac{3}{2}$ et $V_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

Si $f\left(\frac{U_n+V_n}{2}\right) \geq 0$ alors $U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$ et $V_{n+1} = V_n$

Si $f\left(\frac{U_n+V_n}{2}\right) \leq 0$ alors $U_{n+1} = U_n$ et $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$

1. a. Calculer $U_1$, $V_1$, $U_2$, $V_2$. 0.5 pt
   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n$ et $V_n$ sont des réels de I 0.5 pt
   c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : 1 pt
      . $U_n \leq \alpha$
      . $V_n \geq \alpha$
2. Démontrer que la suite $(U_n)$ est croissante et la suite $(V_n)$ est décroissante. 0.5 pt
3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $V_n$ - $U_n$ = $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 0.5 pt
   b. Démontrer que pour tout entier n, $\alpha - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $V_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 0.5 pt
   c. Soit k un entier naturel, donner une condition suffisante sur k pour que $U_k$ soit une valeur approchée à $10^{-1}$ près par défaut de $\alpha$. 0.25 pt