MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
DELEGATION PROVINCIALE DU LITTORAL
Inspection Provinciale Chargée de l'enseignement des Sciences
Sous-section MATHEMATIQUES

Année scolaire 2006 / 2007

Évaluations harmonisées Provinciales (Littoral) / 3ème *Séquence – Décembre 2006*

Tle C / E	Épreuve de MATHÉMATIQUES	Durée : 4H Coef. :

Exercice 1 (5 points)

Dans tout l'exercice, le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I. On considère le polynôme complexe P(z) suivant : $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. a) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Démontrer que si $P(z_0) = 0$ alors $P(\overline{z_0}) = 0$ — 0,5 pt

   b) On sait que l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions distinctes ou confondues.
   Démontrer qu'elle possède au moins une solution réelle que l'on notera α. — 1 pt

2. a) Déterminer les deux valeurs de λ pour lesquelles l'équation $P(z) = 0$ admet une racine complexe non réelle de module 2. — 1 pt

   b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ pour chacune des valeurs de λ ainsi trouvées. — 1,5 pt

II. On considère l'application f de $P \setminus \{i\}$ dans P définie par

$f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z - 2 + i}{iz + 1}$.

Calculer $z' + i$ en fonction de z.
Soit B le point d'affixe i. Déterminer l'image par f du cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{2}$. — 1 pt

Exercice 2 (5 points) / Série C uniquement

1. Soient a et b deux nombres réels non nuls.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :
   $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-i}b^{i-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ — 1 pt

2. Démontrer en utilisant les congruences que pour tout entier naturel n, le n nombre entier
   $A = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. — 0,75 pt

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A(12 ;18).
   On désigne par B un point de l'axe $(O, \vec{i})$ et C un point de l'axe $(O, \vec{j})$ tels que
   mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

   a) Démontrer que le couple (x , y) est une solution de l'équation (E) : $2X + 3Y = 78$ — 1 pt

   b) Trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 dans $\mathbb{Z}$, à partir de la définition de B et C. — 0,5 pt

   c) Déterminer tous les couples (x , y) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). — 1 pt

   d) Déterminer tous les couples (B , C) de points tels que x et y soient des nombres entiers relatifs vérifiant $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$. — 0,75 pt

Exercice 2 (5 points) / Série E uniquement

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $u(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$

Soient h et h_1 les fonctions numériques de la variable réelle x définie par : $h(x) = u(\tan x)$ et $h_1(x) = \dfrac{\sin x - 3\cos x}{\sin x - \cos x}$

1. a) Ecrire h(x) en fonction de tan x et en déduire l'ensemble de définition de h, noté D_h — 0,25 pt + 0,5 pt

   b) On note D_{h_1} l'ensemble de définition de h_1.

   Montrer que $D_{h_1} = D_h$ et que h et h_1 coïncide sur D_h — 0,75 pt

2. a) Montrer que h est périodique, de période π. — 0,25 pt

   b) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier les variations de la fonction h sur

   $D_E = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ — 0,25 pt

3. a) Etudier les variations de h sur D_E et dresser son tableau de variations — 1,5 pt

   b) Tracer la courbe représentative (C_h) de h sur D_E dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 0,5$ cm — 1 pt

   c) Déduire de ce qui précède le tracé de (C_h) sur D_h

   Note : On admettra que la représentation graphique de h présente une inflexion au point de coordonnées $\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$

Exercice 3 (5 points)

L'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points A(1 ; 0 ; 0) ; B(1 ;-1 ; 1) ; C (-2 ; 0 ; 1) ; D(-2 ; 1 ; 0) et M(x ; y ; z).

1. On considère le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   Déterminer le triplet (x, y, z) de coordonnées de M pour que l'on ait simultanément
   $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$ — 1,25 pt

2. Déterminer le lieu géométrique des points G_λ, barycentres des points pondérés
   (A, λ) ; $(B, \lambda-1)$; $(C, 1-2\lambda)$; $(D, 1)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$
   (Indication : ABCD est un parallélogramme non aplati). — 1,25 pt

3. Soit H un point de $(\mathscr{E})$ tel que ABCH soit un tétraèdre, I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le milieu de [CH]. Soit α un réel et H_α le barycentre lorsqu'il existe des points pondérés $(A, 2\alpha+1)$; (B, α) ; $(C, \alpha-2)$; $(H, -3)$.

   a) Montrer que H_α est un point du plan (IJK)

   On rappelle que pour tout point M de $(\mathscr{E})$ on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ — 1,5 pt

   b) Soit E le milieu de [IJ] et F le barycentre des points pondérés (J,1) ; (K ;-3).
   Montrer que H_α est un point de la droite (EF). — 1 pt

Exercice 4 (5 points)

I. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a , b], $a < b$, telle que $f([a , b]) \subset [a , b]$.
On suppose de plus qu'il existe un réel $k \in]0 ; 1[$ tel que :
pour tout $x \in [a , b]$, on a $|f'(x)| \leq k$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule dans l'intervalle [a , b].

   (On pourra considérer la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$) 1,25 pt

2. Déduire de 1.) que l'équation $x^3 - 4x + 2 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle [0 ;1] 1,25 pt

II. Soit g la fonction numérique définie de]0 ; 2[vers $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto \tan\left[\frac{\pi}{2}(x - 1)\right]$.

1. a) Justifier que g est une bijection]0 ; 2[sur $\mathbb{R}$. 1 pt

   b) Soit h la fonction réciproque de g. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. 0,5 pt

2. On considère la fonction $k : x \mapsto h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Calculer $k'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, puis en déduire explicitement $k(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. 1 pt