LYCÉE JOSS _ DOUALA | Année scolaire 2006 / 2007

3ème Séquence / 23 janvier 2007

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

EXERCICE 1 :

Une fonction f et sa courbe représentative C dans un repère orthogonal (0, I, J) possède les propriétés suivantes :

- f est définie et dérivable sur IR ;
- le point J est centre de symétrie de C ;
- la droite (D) = (JK) est asymptote C en - ∞ et en +∞.
- la droite (T) d'équation $y = (1- e)x + 1$ est la tangente à C en J.

Le but du problème est de déterminer une expression de f(x) et de mettre en évidence d'autres propriétés de f.

1. Expression de f(x)
   a. Montrer qu'il existe une fonction φ, dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant comme limite 0 en +∞ et en - ∞, telle que : $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$.
   b. Montrer que, pour tout réel x, f(x) + f(-x) = 2.
   c. En déduire que φ est impaire, puis que la fonction f', dérivée de f, est paire.
   d. On admet que φ(x) est de la forme : $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$. Calculer les constantes a et b.

2. Sens de variation de f
   a. Vérifier que $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$.
   b. Étudier le sens de variation de f' sur [0, +∞[et dresser son tableau de variations.
   c. Montrer que l'équation f '(x) = 0 admet une solution unique α dans [0, +∞[, puis que $0,51 < \alpha < 0,52$.
   d. Étudier les variations de f sur [0, +∞[.
   e. Exprimer le minimum $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.

3. Propriétés géométriques de C
   a. Étudier la position de C par rapport à (D) sur [0, +∞[.
   b. Étudier la position de C par rapport à (T) sur [0, +∞[.

4. Construire la courbe C

EXERCICE 2 :

1. Démontrer que, pour tout n > 0 n entier, l'équation $xe^{-\frac{1}{nx}} = 1$ a une unique solution α_n dans]0 ;+∞[.
2. Démontrer que α_n est solution de l'équation: $x\ln x = \frac{1}{n}$.
3. Soit h la fonction sur [1 ; +∞[par : $h(x) = x\ln x$.
   a. Étudier ses variations.
   b. Prouver que $1,76 < \alpha_1 < 1,77$.
   c. Prouver que la suite (α_n) est décroissante.
4. a. Justifier le fait que la suite (α_n) converge et que sa limite α est supérieure ou égale à 1.
   b. Démontrer que $h(\alpha) = 0$. En déduire la valeur de α.

EXERCICE 3 :

n désigne un entier strictement supérieur à 1.

1. Soit f_n la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par: $f_n(x) = x^n \ln x$.
   a. Étudier les variations de f_n.
   b. Donner l'allure générale des courbes représentatives (C_n) des fonctions f_n.
   On précisera, en particulier, leurs positions relatives.
2. a. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique X_n et que $1 < X_n$.
   b. Démontrer que la suite de terme général x_n, $n \geq 2$, est décroissante.
   c. On pose $t_n = (x^n)''$. Montrer que $t_n \ln t_n = n$.
   d. Montrer que pour tout $x > 0$,
   $x - 1 \leq x \ln x$, puis que $1 \leq t_n \leq n + 1$.
   En déduire un encadrement de X_n.
   e. Démontrer que la suite (x_n) admet une limite que l'on précisera.

EXERCICE 4 :

Soit deux droites (D) et (D'), A un point de (D) et A' un point de (D').
Démontrer qu'il existe deux déplacements qui transforment A en A' et (D) en (D').

EXERCICE 5 :

Soit ABCD un carré de sens direct et M un point de la droite (BD). Soit P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB), (BC), (CD) et (DA).

1. Démontrer qu'il existe un quart de tour direct r tel que $r(C) = S$ et $r(M) = P$.
2. En déduire que les droites (MC) et (PS) sont perpendiculaires.

EXERCICE 6 :

1. Démontrer que deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$. (Théorème de BEZOUT - BACHET).
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $A = 2n + 1$ et $B = 3n + 1$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer les entiers x et y tels que $2x + 3y = 5$.
4. a et b sont deux entiers naturels. On pose $d = \text{PGCD}(a\ ;b)$ et $m = \text{PPCM}(a\ ;b)$.
   Déterminer tous les couples (a ; b) tels que $m - 2d = 11$.

EXERCICE 7 :

Soit A, B, C et D quatre points distincts deux à deux, tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en un point I.
Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace orienté $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.

EXERCICE 8 :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace $\mathscr{E}$, u, v, w, h quatre réels tels que : $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$.
(P) est le plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$, (D) la droite d'équation paramétrique :
$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ où λ est un réel.

1. Déterminer des conditions sur les coefficients u, v, w, h pour que (P) contienne (D).
   On pourra exprimer w et h en fonction de u et v.
2. Soit A(1, 1, 1). Déterminer les équations des plans (P) contenant (D) tels que la distance de A à (P) soit égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.