Powered by http://maths.educamer.org
document téléchargé sur grandprof.net

COLLÈGE LIBERMANN DOUALA Année scolaire 2006 / 2007

3ème Séquence / 25 janvier 2007

Tle C	CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES	Durée : 2H30

EXERCICE 1 : 6 points

1. Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞ [par : f(x) $= \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$
   a. Déterminer la limite de f en 0 et en + ∞
   b. Étudier les variations de f
   c. En déduire le signe de f
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose
   $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et on se propose de déterminer la limite de la suite (U_n) définie pour tout n ≥ 1 par $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ (on admet que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$)
   a. Démontrer par récurrence que : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
   b. En déduire que pour tout entier n ≥ 2, $S_n = \frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}$
   c. A partir du résultat précédent, déterminer la limite de $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n}\right)$ puis la limite de la suite (U_n)

Problème : 14 points

Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞ [par f(x) = $\frac{x\ln x}{x+1}$ si x > 0 et f(0) = 0.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J)

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. a. Soit φ la fonction définie sur]0 ; + ∞ [par φ(x) = lnx + x + 1.
   Étudier les variations de φ.
   b. Montrer que l'équation φ(x) = 0 admet une solution unique β et 0,27 < β < 0,28
3. a. Pour tout x > 0, exprimer f'(x) en fonction de φ(x).
   b. Déterminer la limite de f en + ∞
   c. Donner le tableau de variation de f.
   d. Déterminer la limite de lnx – f(x) en + ∞ puis donner une interprétation géométrique du résultat.
   e. Soit Γ la courbe représentative de x $\mapsto$ lnx dans le repère (O, I, J).
   Étudier la position de Γ et (C) ; construire les deux courbes dans le repère (O, I, J).
4. On se propose d'étudier l'équation f(x) = n, où n est un entier naturel non nul.
   a. Montrer que pour tout entier n non nul, cette équation admet une solution unique α_n.
   b. Montrer que pour tout entier non nul n, $\alpha_n \geq e^n$
   c. En déduire la limite de la suite (α_n)
   d. Prouver que la relation f(α_n) = n peut s'écrire sous la forme $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$ (1)
   e. En déduire la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$
5. a. Justifier pour tout entier non nul n, il existe un réel positif ε_n tel que α_n = en(1 + ε_n) (2).
   b. A l'aide de (1), exprimer (1 + ε_n)ln(1 + ε_n) en fonction de n.

grandprof .net infos concours education epreuves examens

Powered by http://maths.educamer.org
document téléchargé sur grandprof.net

c. Démontrer que pour tout réel positif : $0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$

d. En déduire que pour tout n ≥ 1 ; $\varepsilon_n \leq ne^{\varepsilon} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$,

puis que : $0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$ (3)

e. A l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de $e^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers + ∞.

grandprof .net infos concours education epreuves examens