COLLEGE ALFRED SAKER | Année scolaire 2006 / 2007
B.P. 8038

3ème Séquence (D.S. N° 1 du 2è trimestre)

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

EXERCICE 1 : 3,5 Points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$.
On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, ….., $f^{(n)}$ les dérivées successives de f.

1. Calculer $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$.
3. Pour tout entier naturel non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   a. Calculer les coordonnées X_n et Y_n de M_n .
   Vérifier que les points M_n appartiennent à la courbe d'équation $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$.
   b. Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.
   c. Vérifier que la suite (Y_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   Étudier la limite de la suite (Y_n)

EXERCICE 2 : 2,5 Points

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Pour tout M du plan, on pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$.
Soit r la transformation telle que $r = r_2 o r_1$.

1. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB) et Ω le milieu du segment [BD]. Déterminer r(B).
2. a. Démontrer que les points M, N et M' sont alignés si seulement si $Mes(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{3}(\pi)$.
   b. En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' sont alignés est un cercle passant par les points A et Ω. Construire (Γ).

EXERCICE 3 : 3 Points

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.
Soit (C) la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé (0, I , J).

1. a. Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   b. Déterminer les asymptotes à la courbe (C).
   c. Étudier les variations de g et donner son tableau de variation.
2. Tracer (C).
3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique α et que $\alpha \in [-2 , -1]$.
   b. Montrer que $\alpha = -1 - \sqrt{2e^{\frac{\alpha}{2}}}$.

EXERCICE 4 : 4 Points

ABCD est un carré direct. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. On pose $f = S_{(IK)} o r(A, \frac{\pi}{2})$.
   a. Déterminer f (A) et f (B).
   b. En déduire que f est une symétrie glissée.
   c. Déterminer l'axe de f.
   d. Déterminer f (I) et en déduire le vecteur directeur de f.
2. On pose g = r $(A, \frac{\pi}{2})$ o $S_{(IK)}$.
   a. Déterminer g (A) et g (B).
   b. En déduire que g est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe et le vecteur.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de gof
4. a. Déterminer l'image de B par fog.
   b. Soit E le point d'intersection des droites (BC) et (IL) ; Déterminer l'image de E par fog.
   c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de fog.

EXERCICE 5 : 7 Points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.
On note Γ la courbe de f dans un repère orthonormé (0, I. J).

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que Γ admet une asymptote (D) d'équation : Y = -x et préciser la position de Γ par rapport à (D).
4. Tracer (D) et Γ (unité graphique : 4cm).
5. Soit x_0 un nombre réel non nul. On note : M et N les points de Γ d'abscisses respectives x_0 et $-x_0$.
   a. Vérifier que $f(x_0) - f(-x_0) = -x_0$ et en déduire que la droite (MN) garde une direction fixe que l'on précisera.
   b. Montrer que l'on a : $f'(x_0) + f'(-x_0) = -1$ et en déduire que les tangentes à Γ en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.
6. Soit u et v les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

   $u(t) = \ln(1 + t) - t$ et $v(t) = \ln(1 + t) - t + \frac{1}{2}t^2$.

   Étudier les variations de u et v puis en déduire que pour tout réel t positif on a :

   $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1 + t) \leq t$.
7. Soit n un entier naturel non nul. On considère le nombre $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.
   a. Démontrer que : $\frac{1 - e^{-n}}{e - 1} - \frac{1}{2} x \frac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1} \leq S_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}$.
   b. On admet que la suite (S_n) a une limite réelle L : Montrer que $\left| L - \frac{1}{e - 1} \right| \leq \frac{1}{2(e^2 - 1)}$.