COLLÈGE ALFRED SAKER — Année scolaire 2006 / 2007

4ème Séquence / Composition du 2è trimestre

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

EXERCICE 1 : 2,5 Points

1. Soit x un réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. Pour tout entier non nul n, on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$ où n! désigne factoriel n.
   a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.
   c. Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 : 2,5 Points

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par :
$G(x) = (x + 2)e^{-x}$; (Γ) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$; Unité sur les axes : 2 cm.

1. a. Etudier la fonction g.
   b. Tracer (Γ).
2. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (Γ), la droite d'équation y = x + 2, Les droites d'équations x = -2 et x = 0.

EXERCICE 3 : 5 Points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. s est l'application du plan qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que :
$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$$
   Montrer que s est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.
2. On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = -2x + 1$.
   a. Déterminer les coordonnées du foyer de (P) et une équation de la directrice (D).
   b. Ecrire l'équation de la tangente au A de coordonnées (0,1).
   c. tracer (P).
   d. Donner l'équation de la parabole (P') image de (P) par s.
3. Soit M un point de (P), H le projeté orthogonal de M sur (D), I le milieu du segment [OH], B le point d'affixe 1 et C le point d'affixe 2.
   a. Montrer $\left(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MH}\right) = \left(\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HB}\right)(\pi)$.
   b. En déduire que $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}\right) = \left(\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HC}\right)(2\pi)$.
4. On choisit $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}\right) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On désigne par z et h les affixes respectives de M et H.
   a. Montrer que $\frac{z - h}{z} = \frac{h - 2}{h} = e^{i\theta}$
   b. En déduire que $z = \frac{2}{(1 - e^{i\theta})^2}$

EXERCICE 4 : 4 Points

Dans le plan orienté, on considère un cercle (C) de Ω ; A, B et O trois points de (C) tels que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4}$; I est le point diamétralement opposé à B sur (C).

1. s est la similitude directe de centre I qui transforme A en B.
   a. Déterminer l'angle de s.
   b. Donner la nature du triangle IAB et préciser le rapport de la similitude s.
2. On appelle G le point défini par la relation $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite (IG) recoupe (C) en K.
   On appelle s' la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
   a. Déterminer l'angle de la similitude de s'.
   b. Montrer que $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA$ x KB.
   c. H désigne le projeté orthogonal de A sur la droite (BK). Exprimer $\overrightarrow{KH}$ en fonction de $\overrightarrow{KB}$.
   d. En déduire que $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}KB^2$.
   e. Déterminer le rapport de la similitude s'.

EXERCICE 5 : 6 Points

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O,I,J).

1. Etudier les variations de f_1 et f_2 (préciser les limites aux bornes et les asymptotes).
2. Préciser les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$. Puis tracer les deux courbes.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int f_n(x)dx$.
   a. On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculer F'(x) et en déduire I_1
   b. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
   c. Calculer I2 puis l'aire du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

      et les droites d'équations x = 1 et x = e.
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :
   $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!})$
   b. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \le I_n \le 1$.
   c. En déduire la limite en $+\infty$ de $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.