Collège Libermann — Année scolaire 2006_2007

Département de Maths — Deuxième Trimestre

Devoir Surveillé n°2 du 23 février 2007 \ Classe : T^le^C \ Durée : 4 heures

L'épreuve comporte deux exercices et le problème que chaque élève devra traiter. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : (5,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = -2x + 1$

1- Déterminer par leurs coordonnées, les points d'intersection de (P) avec les axes de coordonnées et les équations des tangentes à (P) en ces points. 1,5pt

2- Déterminer le sommet, le foyer et la directrice de (P). 0,75pt

3- Tracer (P). 0,5pt

4- Soit K le point de coordonnées (-2 ; 0).
Déterminer le(s) point(s) de (P) le(s) plus proche(s) de K. 0,75pt

5- Soit f la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 .

5.1- Déterminer l'écriture complexe de f. 0,5pt

5.2- Soit (P') l'image de (P) par f. Déterminer la nature et une équation cartésienne de (P'). 1pt

5.3- Tracer (P') dans le même repère que (P). 0,5pt

Exercice 2 : (4,5 points)

Soit dans le plan trois points fixes A, B et O alignés et deux à deux distincts. On désigne par (C) un cercle variable de centre I tangent en O à la droite (AB). Les autres tangentes à (C) issues de A et de B se coupent au point M. On pose OA = a, OB = b et on suppose que a > b.

Le candidat fera une figure pour chacune des deux questions suivantes.

1) On suppose dans cette question que le point O appartient au segment [AB].

1.1- Soit Ω le milieu du segment [AB], exprimer OΩ en fonction de a et b. 0,25pt

1.2- Démontrer que la différence MA – MB est constante. 0,5pt

1.3- En déduire que le point M varie sur une hyperbole dont on précisera les foyers, une directrice, les sommets et l'excentricité. 1pt

1.4- Déterminer et construire la tangente en M à cette hyperbole. 0,5pt

2) On suppose maintenant que le point O n'appartient pas au segment [AB].

2.1- Soit Ω le milieu du segment [AB], exprimer OΩ en fonction de a et b. 0,25pt

2.2- Démontrer que la somme MA + MB est constante. 0,5pt

2.3- En déduire que le point M varie sur une ellipse dont on précisera les foyers, une directrice, les sommets de l'axe focal et l'excentricité. 1pt

2.4- Déterminer et construire la tangente en M à cette ellipse. 0,5pt

Problème : (10 points)

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B

Partie A :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{-x}$ et la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$

b) En déduire que pour tout réel positif x, $f(x) \leq \dfrac{x}{1+x}$

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente

3. Etudier les monotonies de la suite (u_n)

4. On pose pour tout n de IN, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = e^{-S_n}$

b) Quelle pourrait être la limite de la suite (S_n) ?

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.

1.a) Etudier la fonction f

b) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé (O, I, J).

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .

3. On appelle φ la fonction définie par $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

a) Calculer $\varphi'(x)$

b) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$

c) Démontrer que sur $\mathbb{R}_+$, φ est majorée par α

4. Soit v la suite définie par : $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \varphi(v_n)$

a) Démontrer que v est majorée par α

b) Démontrer que v est croissante

c) En déduire que v est convergente de limite l .

d) Démontrer que l = α

" Ce qui est simple est faux, ce qui est compliqué est inutilisable."

Paul Valery