COLLEGE CATHOLIQUE ST CHARLES BORROMEE Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence / 25 Avril 2007

T^{le} C	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

Instructions :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
La rédaction est importante. Soyez propre et clair.

Exercice 1 : 2,5 points

1. a) déterminer les entiers x et y tels que $14x - 31y = 3$ — 1 pt

   b) Déterminer deux couples d'entiers premiers entre eux solutions de l'équation :
   (E) : $14x - 31y = 3$ — 0,5 pt

2. Trois phares A, B et C lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures. A quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? — 1 pt

Exercice 2 : 2,5 points

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
   a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche — 0,5 pt

   b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages. — 0,5 pt

2. n étant un nombre entier naturel non nul, on effectue n tirages successifs d'une boules avec remise ; on appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours des ces n tirages une boules blanche uniquement au dernier tirage.

   a) Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et P_4 — 1 pt

   b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$
   Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer la limite de S_n — 0,5 pt

Exercice 2 : 4 points

ABC est un triangle indirect rectangle en A tel que BC = 2AB et S la similitude directe du plan orienté, de centre B qui transforme C en A.

1. Préciser le rapport et une mesure de l'angle de S. — 0,5 pt
2. Soit (H) l'ensemble des points M du plan vérifiant MB = 2d(M, (AC))

   a) Donner la nature de (H) et préciser ses éléments remarquables — 0,75 pt

   b) Donner la nature puis le foyer et l'excentricité de l'image S(H) de (H) par S
3. Application : A, B et C ont pour affixe respectives $1 + 2i$, $1 + 5i$ et $7 + 2i$ — 0,75 pt

   a) Donner la forme complexe de S — 0,5 pt

   b) Ecrire une équation cartésienne de (H) — 0,75 pt

   c) Construire (H) dans un repère orthonormé du plan complexe — 0,75 pt

Problème 11 points

I.

On note f_n la fonction numérique définie sur IR - $\{-1\}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n}$; $n \in$ IN*.

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1. Etudier les limites de f_n en $-\infty$, $+\infty$ et -1 (on tiendra compte de la parité de n pour la limite en -1) — 1 pt
2. Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et étudier, suivant la parité de n, le signe de $f'_n(x)$ — 2 pts
   Dresser le tableau des variations de f_n — 1 pt
3. Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point — 0,5 pt
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat. — 0,75 pt
5. a) Donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} — 0,5 pt

   b) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) — 0,5 pt
   Représenter graphiquement (C_1) et (C_2) — 1,5 pt

II.

Pour tout $n \in$ IN*, on définit la suite (U_n) par $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout $n \in$ IN*, on a : $U_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ? — 1,25 pt
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :
   $\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) \leq U_n \leq \dfrac{e}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ — 0,75 pt
   En déduire la limite de la suite (U_n) — 0,25 pt
2. Etablir une relation entre U_n et U_{n+1}
   (On pourra utiliser le résultat de la question I.5.a) — 0,5 pt
   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \dfrac{ne^x}{(x+1)^{n+1}} = 1$ — 0,5 pt