COLLEGE INTAC
B.P. 1973 Douala

Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence

Tle C	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

L'épreuve comporte deux exercices et un problème reparti sur deux pages

EXERCICE I : 4,5 PTS

Soit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Justifier l'existence de I_n. 0,25 pt
   b. Calculer I_1. 0,75 pt
   c. Démontrer que $\forall n \geq 2$, $I_n = e - nI_{n-1}$. (On pourra effectuer une intégration par parties).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, F_n une primitive sur $[0; +\infty[$ de $f_n : x \mapsto (\ln x)^n$.
   a. Démontrer $g : t \mapsto F_n(e^t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. 0,25 + 0,5pt
   b. en déduire que :
      i. $\forall_n \geq \mathbb{N}^*$, $I_n = F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 t^n e^t dt$. 0,75pt
      ii. $\forall_n \geq \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{x+1}$ (on pourra encadrer $t^n e^t$ sur $[0,1]$). 1 pt

EXERCICE II : 4,5 PTS

On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x , y) vérifient :

$X^2 - y^2 + 2xy\sqrt{3} + 2 = 0$

1. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($i^2 = -1$) et on considère la transformation g du plan dans lui-même
   Qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = jz$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g. 0,75 pt
2. On désigne par (H) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\text{Re}(z^2) = 1$.
   Déterminer la nature de l'ensemble (H) et le construire. 1 pt
3. Montrer qu'un point M du plan d'affixe z appartient à l'ensemble (Γ)
   si et seulement si $\text{Re}(jz^2) = 1$. 1 pt
4. Montrer que (H) est l'image de (Γ) par la transformation g. 0,75 pt
5. Déterminer la nature de (Γ). Tracer (Γ) sur le graphique précédent. 1 pt

PROBLEME : 11 PTS

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) unité graphique : 2 cm.

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

1. Déterminer une fonction affine h solution de (E) . 0,5pt

2. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction f – h est solution d'une Equation différentielle (E') que l'on précisera. 0,75 pt
3. Résoudre (E'), puis (E) . 0,25 x 2 pt
4. Déterminer la solution f_0 de (E) qui s'annule en 0. 0,25 pt

PARTIE B :

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - x - 1$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

1. Etudier les variations de f. 1,5pt
2. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions dont une notée α est comprise entre 2 et 3. 0,75 pt
3. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$. 0,75 pt
4. Construire $(\mathcal{C})$. 0,5pt
5. On considère la restriction h de f à $]-\infty; 2\ln 2[$
   a. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 2\ln 2[$ vers un intervalle I à préciser. 0,5pt
   b. Calculer $(h^{-1})'(0)$. 0,25 pt
   c. Construire dans le repère précédent la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1}

      (on tracera la tangente à $(\mathcal{C}')$ au point d'abscisse 0. 0,75 pt
6. On considère la fonction g définie sur $]-1; +\infty[$ par g(x) = 2ln(x + 1).

   On se propose dans cette partie de trouver une valeur approchée du réel α de la question 2.
   a. Montrer que α est solution de l'équation g(x) = x. 0,25 pt
   b. Montrer que pour tout x de $[2; +\infty[$, $g(x) \in [2; +\infty[$ et que $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$. 0,25+0,5pt
   c. On définie la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [2; +\infty[$. 0,75 pt
      ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ 0,75 pt
      iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{2^n}{3}$ 0,5pt
      iv. En déduire que la (U_n) converge vers une limite que l'on précisera. 0,5pt
      v. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près 0,5pt