Collège CHEVREUL
BP. : 4093
DOUALA

BACCALAUREAT BLANC 2006/2007
Série C
Durée : 4h – Coef. 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1: /3 pts

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires (n entier naturel non-nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'apparition.

1. On tire trois boules successivement avec remise, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de probabilité de X. Calculer E(X) espérance mathématique, déterminer m pour que E(X) = 1,2.
2. Dans la suite de l'exercice on prend m = 3 ; on tire maintenant les 5 boules de l'urne successivement sans remise. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la $1^{ère}$ boule noire tirée.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.

EXERCICE 2 : /4 pts

Le plan orienté est rapporté à un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ orthonormé. On désigne par r l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z=(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})(z-1)$

1. Déterminer que r est une rotation dont-on précisera l'angle et le centre.
2. A tout nombre complexe $Z\neq 3$ on associe le nombre complexe $Z=\frac{Z^2}{\overline{Z}-3}$ où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z. On note l'ensemble (H) des points M du plan d'affixe Z tel que Z soit un nombre réel.
   a) Démontrer que (H) est une droite soit une hyperbole (H') dont-on déterminera le centre Ω, les foyers, les directrices et l'excentricité.
   b) Tracer (H') dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.
3. Démontrer r(H') = H'' est une conique, dont-on précisera la nature, son centre et son excentricité.

EXERCICE 3 : /3 pts

Soit (D) le plan vectoriel rapporté à la base $(\vec{i},\vec{j})$ f est l'endomorphisme de (E) qui associe à $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ le vecteur $f(\vec{u})=(x+\frac{1}{2}y)\vec{i}+(-2x-y)\vec{j}$.

1. Montrer que fof est l'endomorphisme nul. f est-il bijective ? Justifier.
2. Déterminer le noyau (E_1) et l'image (E_2). Comparer E_1 et E_2.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul du noyau de f.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $f(\vec{v})=\vec{u}$.
   b) Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de E.
   c) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

PROBLEME : /10 pts Il possède trois parties indépendantes.

Partie A : Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit E le milieu du segment [CD] et DEFG le carré direct de centre O'.

1. Réaliser une figure en considérant AB = 6 cm.
2. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de s. Préciser l'image de E par s. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF})$.
   b) On note (Γ) le cercle circonscrit au carré ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF) ; placer (Γ) et I sur la figure. Prouver que I appartient à (Γ).
   c) Démontrer que (ID) et (BF) sont orthogonales.

Partie B : Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numérotation de base $n(n\geq 6)$ $a=\overline{2310}^n$; $b=\overline{252}^n$ On désigne par d le PGCD (a,b).

1. Démontrer que $2x+1$ divise a et b et que d = $2(2x+1)$ et d = $2x+1$ selon que n est pair ou impair.
2. On pose n = 6. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de l'équation $ax+by=-26$.

Partie C : Dans toute cette partie, f désigne la fonction numérique de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x+1}\ln(x+1)+\ln x$. $(U_n)x\in N^*$ désigne la suite de terme général.

$$U_n=\left(\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{k}\right)-lxn=(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})-lxn$$

I.- ***Etude et représentation graphique de f : unité : 2 cm.***

1.a. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variations de f.

2.a. Démontrer que f est une bijection de $]0;+\infty[\rightarrow]-\infty;0[$

   b) Tracer dans un même repère des courbes de f et f^{-1}
   c) $\propto$ désigne un réel strictement positif et inférieur à 1. On note (D) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que : $\propto\leq x\leq 1$ et $f(x)\leq y\leq 0$. En utilisant une intégration par parties, déterminer en fonction de $\propto$ l'aire de (D) en Cm^2.
   d) Calculer la limite de cette aire lorsque $\propto\rightarrow 0^+$.

II.- ***Etude de la convergence de la suite*** $(U_n)n\in N^*$

   a) Calculer les valeurs exactes de U_1 et U_2
   b) Etudier le sens de variations de $(U_n)n\in N^*$ (On pourra utiliser le signe de f).

2.a. Démontrer que $U_n\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{12}-\int_k^{k+1}\frac{1}{E}dt)+\frac{1}{n}$.

b) Pour tous entier $k\in[1;n-1]\forall t\in[k,k+1]$ $\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{k}$.

c) En déduire que $\forall n\in N^*$; $U_n>0$. En déduire que la suite $(U_n)n\in N^*$ est convergente.