Collège Evangélique de New - Bell   Année Scolaire 2006/2007

DEVOIR SURVEILLE N°5_Epreuve de Mathématiques - 4h - TC Coeff. 6

Exercice 1 : (3 Pts)

1 - On considère les équations suivantes, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) $x^2 + 4y^2 = 16$
(2) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$
(3) $4x^2 - y^2 = 16$
(4) $4x - y^2 = 0$

Reconnaître dans chaque cas la courbe (C) correspondante ; préciser ses éléments caractéristiques : axe focal ; foyers axe de symétrie, sommets, asymptotes éventuelles, et tracer (C).

Exercice 2 : (3 Pts)

1 - Intégrer les équations différentielles suivantes :

(E_1) $y' - 3y = x^2$
(E_2) $2y'' - 5y' + 3y = 0$
(E_3) $y'' + 2y' - 3y = x^2 + x$

Exercice 3 : (4 Pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A et direct avec $AB = AC = \ell$ où $\ell > 0$

On note D la symétrie de A par rapport à B, O le milieu de [CD] et (Γ) le cercle de diamètre [CD]. On désigne par s la similitude qui transforme D en B et B en C. On se propose de déterminer les éléments caractéristiques de s, notamment son centre I.

1 - a) Déterminer le rapport k et l'angle de s (0,5 Pt)

b) En déduire l'existence de I (0,25 Pt)

2 - Démontrer que $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$ (1)

et que IC = 2 ID (2) (0,5 Pt)

3 - a) A l'aide de (1) démontrer que I appartient à (Γ) (0,5 Pt)

b) En utilisant (2), montrer que $ID = \ell$ (0,5 Pt)

c) Etablir enfin que BI = BC (1 Pt)

4 - a) Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de [IC] (0,25 Pt)

b) Préciser la nature du quadrilatère CADI, puis placer I. (0,5 Pt)

Problème : (10 Pts)

A/ Etude de la fonction f qui à x associe $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$ si x > 0 et f(0) = 0

a_1) Quel est le domaine de f ? (0,5 Pt)

a_2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. (2 x 0,5 Pt)

a_3) Soit h la fonction définie pour $x > 0$ par $h(x) = 1 + x + \ln x$

a_4) Prouver que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique b, et donner un encadrement de b au centimètre près. (0,5 Pt)

a_5) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $h(x)$. (0,25 Pt)

B/ Etude de l'équation $f(x) = 1$ sur $]0, +\infty[$

On définit la fonction g sur les $x > 0$ par $g(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$

b_1) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$, donner une solution unique a, et que $3,5 \leq a \leq 3,7$ (2 x 0,5 Pt)

b_2) Démontrer que $f(x) = 1$ équivalent à $g(x) = x$ (0,5 Pt)

Etudier la monotonie de g. (0,5 Pt)

b_3) Démontrer que si K désigne l'intervalle $[3,5 ; 3,7]$ alors $g(K) \subset K$ (0,5 Pt)

b_4) Démontrer que, pour tout x de K, on a $|g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$ (0,5 Pt)

b_5) En déduire que $\forall\ x \in K\ |g(x) - a| \leq \frac{1}{3}\ |x - a|$ (0,5 Pt)

b_6) Si on pose $U_0 = 3,5$ et, pour tout x entier naturel, $U_{n+1} = g(U_n)$, démontrer que (U_n) converge et trouver sa limite. (1 Pt)

b_7) Donner une valeur approchée de a au millimètre près. (0,5 Pt)