REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2007

SESSION PRINCIPALE
SECTIONS : SCIENCES EXP. + TECHNIQUE
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 3

EXERCICE 1 (4 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2z^2 + (7+i\sqrt{3})\,z - 4(1-i\sqrt{3}) = 0$.
   a – Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
   b – Donner alors l'autre solution de (E).

2) a – Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$.
   b – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : 2z^4 + (7+i\sqrt{3})\,z^2 - 4(1-i\sqrt{3}) = 0$.

3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et on désigne par I le milieu du segment [OA].
   a – Ecrire z_B sous forme exponentielle.
   b – Placer I et B et montrer que le triangle OIB est isocèle.

EXERCICE 2 (6 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(6,0,0) ; B(0,6,0) ; C(0,0,6) et D(-2, -2, -2).

1) a – Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x + y + z - 6 = 0$.
   b – Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.
   c – Donner un système d'équations paramétriques de la droite (OD).
   d – Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan P. Vérifier que H a pour coordonnées (2,2,2) et qu'il est équidistant de A, B et C.
   e – En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

2) Soit Q le plan médiateur du segment [CD].
   a – Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $x + y + 4z - 6 = 0$.
   b – Montrer que (OD) coupe Q en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

3) Soit S la sphère de centre Ω et de rayon $3\sqrt{3}$.
   a – Écrire une équation cartésienne de S.
   b – Vérifier que S passe par A, B, C et D.
   c – Quelle est alors l'intersection de S et P ?

PROBLEME : (10 points)

I - On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x(x-1) + \text{Log}\, x$.

1) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
2) Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) pour $x > 0$.

II - Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 + (\text{Log}\, x)^2$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b – Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $f'(x) = 2\dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$.

   c – Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que la restriction h de f à $]0, 1]$ est une bijection de $]0, 1]$ sur $[0,+\infty[$.
On désigne par h^{-1} la réciproque de h et par (Γ) la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Soit u la fonction définie sur $]0, 1]$ par $u(x) = h(x) - x$.
   a – Dresser le tableau de variation de u sur $]0, 1]$.
   b – En déduire qu'il existe un seul réel α de $]0, 1]$ tel que $h(\alpha) = \alpha$.

   Vérifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

4) a – Montrer que $(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$.

   b – Tracer dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ d'équation $y = x$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe (Γ).

III – On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

Soit $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} x\, f'(x)\, dx$.

1) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = -\alpha^2 - \mathscr{A}$.

2) a – Montrer que $I = 2\displaystyle\int_{\alpha}^{1} g(x)\, dx$.

   b – En déduire que $I = -\dfrac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - \dfrac{7}{3} - 2\alpha\, \text{Log}\, \alpha$.

   c – Donner la valeur de $\mathscr{A}$ en fonction de α .