

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2006

SESSION DE CONTRÔLE

SECTIONS : SCIENCES EXP. + TECHNIQUE

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

COEFFICIENT : 3

EXERCICE 1 (5 points)

Soit α un réel de l'intervalle $[0, \pi]$.

I – 1) Vérifier que : $e^{2i\alpha} - 2i e^{i\alpha} \sin \alpha = 1$

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2 e^{i\alpha} z + 2i e^{i\alpha} \sin \alpha = 0$

II – Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points M, M' et M'' d'affixes respectives $e^{i\alpha}$; $e^{i\alpha} - 1$ et $e^{i\alpha} + 1$.

1) a) Montrer que M est le milieu du segment $[M'M'']$ et que $\vec{MM}' = -\vec{u}$.

b) Placer dans le plan \mathcal{P} , le point M dans le cas où α appartient à $] 0, \frac{\pi}{6} [$ et construire alors les points M' et M'' .

2) a) Montrer que $OM = \frac{1}{2} M'M''$ et en déduire que $OM'M''$ est un triangle rectangle.

b) Déterminer α pour que le triangle $OM'M''$ soit isocèle.

EXERCICE 2 (5 points)

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces portent les nombres $-1, 0, 0, 1, 1, 2$.

I – On lance ce dé deux fois de suite. On désigne par a le nombre apparu sur la face supérieure au premier lancer et par b le nombre apparu sur la face supérieure au deuxième lancer.

1) Déterminer la probabilité de chacun des événements :

A : « Obtenir une somme $(a + b)$ nulle » $p(A) = \frac{2}{9}$.

B : « Obtenir un produit (ab) non nul » $p(B) = \frac{4}{9}$.

2) Sachant que le produit des deux nombres apparus est non nul, quelle est la probabilité pour que leur somme soit nulle ?

$$p(A|B) = \frac{1}{4}$$

II – Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance le dé n fois de suite et on désigne par X l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de fois où le nombre 1 est apparu, sur la face supérieure, au bout de ces n lancers.

1) Déterminer en fonction de n la probabilité p_n de l'événement $(X = 2)$. $p(X=2) = C_n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

2) Soit q_n la probabilité de l'événement $(X \geq 1)$ $q_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

a) Calculer q_n en fonction de n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 2$.

b) Quel est le nombre minimum de lancers qu'il faut pour que l'on ait $q_n \geq 0,99$?

$$n = 12$$

PROBLEME (10 points)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par : g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$

h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$

1) On donne $g(x) = x(1 - \text{Log } x)$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Que peut-on dire de la branche infinie de \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$?

c) Dresser le tableau de variation de g .

d) Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$.

2) On suppose que h vérifie les conditions suivantes :

- h est dérivable sur $]-\infty, 0]$.
- Le tableau de variation de h est le suivant :

x	$-\infty$	0
$h'(x)$		1
$h(x)$		0

+ ↗

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 2x) = 0$

- Pour tout x appartenant à $]-\infty, 0]$ on a : $2x \leq h(x) \leq x$

a) Justifier que h est une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = h^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)$ où h^{-1} désigne la fonction réciproque de h .

Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3) a) Montrer que f est continue en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

c) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

4) a) Montrer que \mathcal{C} admet au voisinage de $-\infty$, une asymptote dont on donnera une équation cartésienne.

b) Tracer \mathcal{C} en précisant les demi-tangentes au point O .

5) Calculer la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.