REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION ❖❖❖ EXAMEN DU BACCALAUREAT ❖❖❖ SESSION DE JUIN 2006	SESSION PRINCIPALE SECTIONS : SCIENCES EXP. + TECHNIQUE EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 3

EXERCICE 1 : (5 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $S = \{ M(x,y,z) \in \mathscr{E}\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0 \}$.

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$

a) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle $\mathscr{C}$.

b) Déterminer les coordonnées du centre A et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.

3) Soit M (a, b, -1) un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une équation cartésienne est : $(a-1)x + (b+2)y + z - a + 2b + 3 = 0$

a) Montrer que M appartient au plan Q.

b) Montrer que S et Q sont tangents en M.

EXERCICE 2 : (5 points)

I – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + i\sqrt{3}z - i = 0$

II – Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

(E) $\quad z^2 + (2i \sin\theta)z - 2i\cos\theta = 0.$

1) a) Vérifier que $(\cos\theta + i)^2 = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$.

b) Résoudre l'équation (E).

2) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a = i$, $b = \cos\theta + (1 - \sin\theta)i$ et $c = -\cos\theta - (1 + \sin\theta)i$

a) Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.

b) Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O . Quel est le rayon de ce cercle ?

PROBLEME : (10 points)

I – Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -2x^2 + 2 - \text{Log}\, x$

1) Etudier le sens de variation de g.
2) Calculer g(1). En déduire que

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 & \text{pour } x \in]0, 1] \\ g(x) < 0 & \text{pour } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

II – On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-1 + \text{Log}\, x}{x} - 2x + 2e$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite D d'équation $y = -2x + 2e$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

3) a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0,1]$. Montrer que h est une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera ; on désignera par h^{-1} la fonction réciproque de h.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,1]$ une solution unique x_o et que x_o appartient à $]0,4 ; 0,5[$.

4) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite D, la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}'$ de h^{-1}.

III – Soit $\alpha \in]0, 1[$. On désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'asymptote D et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

1) Montrer que $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\text{Log}\, \alpha)^2 - \text{Log}\, \alpha$.

2) Déterminer α pour que $\mathscr{A}(\alpha)$ soit égale à $\dfrac{3}{2}$.