# حـل الامتحان الوطني الموحد للباكالوريا
## - الدورة الإستدراكية 2017 -

**التمرين الأول : الهندسة الفضائية**

1 – أ- لنبين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,1,1)$ وشعاعها هو 2.

لدينا معادلة الفلكة S هي :

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$$

إذن : $(x^2-2x)+(y^2-2y)+(z^2-2z)-1=0$

$$(x-1)^2-1^2+(y-1)^2-1^2+(z-1)^2-1^2-1=0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

وبالتالي مركز الفلكة (S) هو : $\Omega(1,1,1)$ وشعاعها $R=\sqrt{4}=2$

ب- لنحسب $d(\Omega,(P))$

$$d(\Omega,(P))=\frac{|(1)-(1)|}{\sqrt{(0)^2+(1)^2+(-1)^2}}=0$$

- الوضع النسبي للمستوى (P) والفلكة (S).

لدينا : $d(\Omega,(P))=0$ وشعاع الفلكة $R=2$

إذن : $d(\Omega,(P))<R$

إذن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C).

ج- لنحدد مركز وشعاع الدائرة (C).

• شعاع الدائرة (C) هو :

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{(2)^2-(0)^2}=2$$

• مركز الدائرة (C) هو نقطة تقاطع المستقيم (D) المار من $\Omega$ والعمودي على المستوى (P) مع المستوى (P) نفسه.

بما أن : $d(\Omega,(P))=0$ إذن $\Omega\in(P)$

وبالتالي مركز الدائرة (C) هو $\Omega(1,1,1)$

ملاحظة هامة : المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة كبرى مركزها هو مركز الفلكة (S) أي $\Omega$ وشعاعها هو شعاع الفلكة (S) أي 2 $r=2$.

2 – أ- بين أن : $\vec{u}(0,1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم $(\Delta)$.

لدينا $(\Delta)$ مستقيم عمودي على المستوى (P).

إذن المتجهة $\vec{u}(0,1,-1)$ المنظمية على (P) موجهة للمستقيم $(\Delta)$.

ب- بين أن : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$

لدينا : $\vec{u}(0,1,-1)$ و $\overrightarrow{\Omega A}(0,-3,1)$

$$\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\begin{vmatrix}-3&1\\1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&0\\1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&0\\-3&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

إذن : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=(3-1)\vec{i}-(0)\vec{j}+(0)\vec{k}$

وبالتالي : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=2\vec{i}$

ومنه فإن : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\sqrt{(2)^2+0^2+0^2}=2$

ولدينا : $\vec{u}(0,1,-1)$

إذن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(-1)^2}=2$

إذن : $\sqrt{2}\|\vec{u}\|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

نلاحظ أن : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$

- لنحدد الوضع النسبي للمستقيم $(\Delta)$ و الفلكة (S).

مسافة $\Omega$ عن المستقيم $(\Delta)$ هي :

$$d(\Omega,(P))=\frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{2}\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\sqrt{2}$$

بما أن شعاع الفلكة (S) هو : $R=2$

إذن : $d(\Omega,(\Delta))<R$

وبالتالي المستقيم $(\Delta)$ يقطع الفلكة (S) في نقطتين.

ج- لنحدد نقط تقاطع المستقيم $(\Delta)$ والفلكة (S).

التمثيل البارامتري للمستقيم $(\Delta)$ هو :

لتكن $M(x,y,z)$

لدينا : $M\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\,.\,\vec{u}$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\,.\,t\\ y+z=1\,.\,t\\ z-2=-1\,.\,t\end{cases},(t\in R)$$

$$(\Delta):\begin{cases}x=1\\ y=-2+t\\ z=2-t\end{cases},(t\in R)$$

لنعوض صيغة $(\Delta)$ في معادلة الفلكة (S) :

$$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

فنحصل على :

$$(1-1)^2+(-2+t-1)^2+(2-t-1)^2=4$$

أي : $(t-3)^2+(1-t)^2-4=0$

يعني أن : $2t^2-8t+6=0$

هذه المعادلة تكافئ : $t^2-4t+3=0$

مميزها هو : $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=4$

وحليها هما : $t_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4+2}{2}=3$

$$t_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4-2}{2}=1$$

لتحديد نقط تقاطع $(\Delta)$ و (S)، نعوض كلا من $t_1=3$ و $t_2=1$ في صيغة $(\Delta)$.

فنحص على :

• إذا كان : $t=3$ فإن : $\begin{cases}x=1\\ y=-2+3\\ z=2-3\end{cases}$

أي المثلوث : $(1,1,-1)$

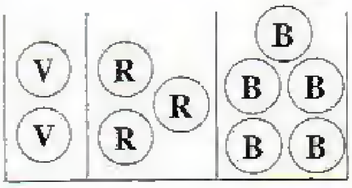
• إذا كان : $t=1$ فإن : $\begin{cases}x=1\\ y=-2+1\\ z=2-1\end{cases}$

أي المثلوث : $(1,-1,1)$

ومنه فإن المستقيم $(\Delta)$ يقطع الفلكة (S) في نقطتين : $E(1,1,-1)$ و $F(1,-1,1)$

## التمرين الثاني : حساب الإحتمالات

المجموع : 10




السحب : 4 كرات تآنيا.

- عدد الإمكانيات : $Card\,\Omega=C_{10}^4=210$

1 - لنبين أن : $p(A)=\dfrac{8}{15}$ وأن $p(B)=\dfrac{19}{70}$

• يتحقق الحدث A إذا سحبنا من الصندوق الكرات :

«$V\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$»

إذن : $Card\,A=C_2^1\times C_8^3=112$

وبالتالي احتمال الحدث A هو :

$$p(A)=\frac{Card\,A}{Card\,\Omega}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15}$$

• يتحقق الحدث B إذا سحبنا من الصندوق الكرات :

«$B\,B\,B\,\overline{B}$» أو «$R\,R\,R\,\overline{R}$»

إذن : $Card\,B=C_5^3\times C_5^1+C_3^3\times C_7^1=57$

وبالتالي احتمال الحدث B هو :

$$p(B)=\frac{Card\,B}{Card\,\Omega}=\frac{57}{210}=\frac{19}{70}$$

2 - أ- بين أن : $p(X=2)=\dfrac{2}{15}$ .

| حالات السحب | قيم $x$ |
|---|---|
| $V\,V\,\overline{V}\,\overline{V}$ | 2 |
| $V\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$ | 1 |
| $\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$ | 0 |

لدينا : $p(X=2)=\dfrac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\dfrac{28}{210}=\dfrac{2}{15}$

ب- لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

لدينا : $p(X=0)=\dfrac{C_8^4}{210}=\dfrac{70}{210}=\dfrac{1}{3}$

وبالتالي : $p(X=1)=p(A)=\frac{8}{15}$

| $xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |

- الأمل الرياضي $E(X)$.

لدينا: $E(X)=\left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{8}{15}\right)+\left(2\times\frac{2}{15}\right)$

إذن : $E(X)=\frac{12}{15}$

وبالتالي : $E(X)=\frac{4}{5}$

**التمرين الثالث : الأعداد العقدية**

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2+4Z+8=0$.

مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(1)(8)=-16$

إذن : $\Delta<0$ للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما :

$Z_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+i\sqrt{16}}{2}=-2+2i$

وَ $Z_2=\overline{Z}_1=-2-2i$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي :

$S_{\mathbb{C}}=\{-2-2i\ ;\ -2+2i\}$

2) أ- لنبين أن $Z'=-iZ-4$.

لدينا R دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

$R(M)=M'$ تكافئ $(Z'-Z_A)=e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(Z-Z_A)$

بما أن : $e^{-\frac{\pi}{2}i}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$

و $Z_A=a=-2+2i$

إذن : $Z'-(-2+2i)=-i(Z-(-2+2i))$

إذن : $Z'+2-2i=-i(Z+2-2i)$

إذن : $Z'=-iZ-2i+2i^2-2+2i$

وبالتالي الصيغة العقدية للدوران R هي : $Z'=-iZ-4$

ب- لنتحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة C بالدوران R.

لدينا : $-iZ_c-4=-i(4+8i)-4$

إذن : $-iZ_c-4=-4i-8i^2-4$

إذن : $-iZ_c-4=4-4i$

إذن : $-iZ_c-4=Z_B$

أي : $Z_B=-iZ_c-4$

وبالتالي B صورة C بالدوران R.

- طبيعة المثلث ABC.

لدينا : A مركز الدوران R إذن $\boxed{R(A)=A}$ و B صورة C بالدوران R إذن $\boxed{R(C)=B}$

إذن : $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وبالتالي ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A.

3) أ- لنبين أن $|c-\omega|=6$

• لدينا : $\Omega$ منتصف القطعة $[BC]$.

إذن : $\omega=\frac{b+c}{2}=\frac{(4-4i)+(4+8i)}{2}$

وبالتالي : $\omega=4+2i$

• ولدينا : $|c-\omega|=|(4+8i)-(4+2i)|$

إذن : $|c-\omega|=|6i|$

وبالتالي : $\boxed{|z-\omega|=6|i|=6}$

ب- مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث $|z-\omega|=6$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

لدينا : $|z-\omega|=6$ يكافئ $|Z_M-Z_\Omega|=6$

أي $\Omega M=6$

وبالتالي مجموعة النقط $M(Z)$ هي دائرة (C) مركزها $\Omega$ وشعاعها 6.

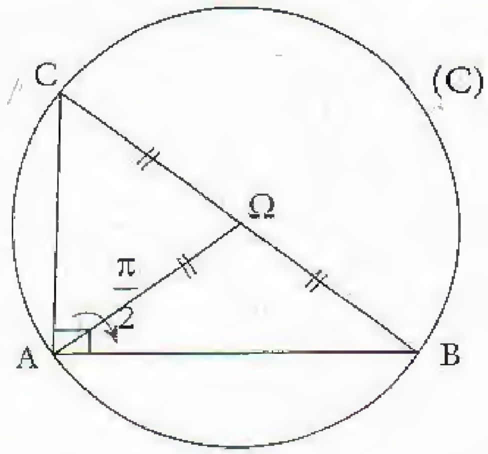
وحيث أن ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A وأن $\Omega$ منتصف [BC].

إذن : $\Omega A = \Omega B = \Omega C$

ولدينا : $|c - \omega| = 6$ أي : $\Omega C = 6$

إذن : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = 6$

وبالتالي مجموعة النقط $M(Z)$ هي الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC.




التمرين الرابع : المتتاليات العددية

(Un) متتالية عددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 17$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) أ- لنبين بالترجح أن $u_n > 16$ لكل n من $\mathbb{N}$.

• من أجل $n = 0$ فإن $u_0 > 16$ أي $17 > 16$ (صحيحة)

• نفترض أن : $u_n > 16$

• لنبين أن : $u_{n+1} > 16$

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 16$

إذن : $\frac{1}{4}u_n > 16 \times \frac{1}{4}$

إذن : $\frac{1}{4}u_n > 4$

إذن : $\frac{1}{4}u_n + 12 > 4 + 12$

إذن : $\frac{1}{4}u_n + 12 > 16$

أي : $u_{n+1} > 16$

وبالتالي : $u_n > 16$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- لنبين أن المتتالية (Un) تناقصية.

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 12 - u_n$

إذن : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 12$

لنؤطر $-\frac{3}{4}u_n + 12$

لدينا حسب ما سبق $u_n > 16$

إذن : $-\frac{3}{4}u_n < -\frac{3}{4} \times 16$ إذن $-\frac{3}{4}u_n < -12$

إذن : $-\frac{3}{4}u_n + 12 < 0$ أي : $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي (Un) متتالية تناقصية.

- لنبين أن المتتالية (Vn) متقاربة.

(Un) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 16.

إذن (Un) متقاربة.

2) نعتبر المتتالية العددية بحيث $v_n = u_n - 16$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- لنبين أن (Vn) متتالية هندسية.

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - 16$

إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 - 16$

إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - 4$

إذن : $v_{n+1} = \frac{u_n - 16}{4}$

إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 16)$

وبالتالي : $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$

ومنه فإن (Vn) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = 1$.

ب- لنستنتج أن $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

حسب ما سبق (Vn) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = 1$

ونعلم أن : $v_n = v_0 \times q^n$

إذن : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ أي $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بما أن : $v_n = u_n - 16$ إذن : $u_n = v_n + 16$

وبالتالي : $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نهاية المتتالية (Un).

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 16$

لأن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ؛ $-1 < \frac{1}{4} < 1$

وبالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 16}$

ج- لنحدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n حيث $u_n < 16.0001$

لدينا : $u_n < 16{,}0001$

وَ $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن : $16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16{,}0001$

إذن : $\left(\frac{1}{4}\right)^n < 0{,}0001$

إذن : $\ln\left(\frac{1}{4}\right)^n < \ln(0{,}0001)$

إذن : $n . \ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0{,}0001)$

إذن : $n > \dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$ لأن : $\ln\left(\frac{1}{4}\right) < 0$

وبالتالي : $n > 6{,}644$

وحيث أن n عدد صحيح طبيعي، إذن : $\boxed{n = 7}$

> تذكير : $a \in \mathbb{R}_+^*$ و $b \in \mathbb{R}_+^*$
>
> $a < b$ تكافئ $\ln a < \ln b$ وَ $\ln a^n = n . \ln a$

## التمرين الخامس : المسألة

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$

1) لنتحقق من أن $g(0) = 0$.

لدينا : $g(0) = 1 - (0+1)^2 e^0$

لأن : $e^0 = 1$ وبالتالي : $\boxed{g(0) = 0}$

2) انطلاقا من التمثيل المبياني للدالة g.

• على المجال $]-\infty, 0]$ المنحنى (Cg) يوجد فوق محور الأفاصيل إذن $g(x) \geq 0$.

• على المجال $[0, +\infty[$ المنحنى (Cg) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن $g(x) \leq 0$.

ومنه نستنتج جدول إشارات g.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x$

1) أ- لنتحقق من أن $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا :

$x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$

إذن :

$x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = x + 1 - 4 \times \frac{x^2}{4} e^{\frac{2x}{2}} - e^x$

إذن : $x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = x + 1 - x^2 e^x - e^x$

إذن : $x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = x + 1 - (x^2+1)e^x$

إذن : $x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = f(x)$

ومنه فإن : $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

- لنستنتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ وَ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = 0$

و $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

ب- لنحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to-\infty} -4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = 0$$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

- الاستنتاج :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

إذن المنحنى (Cf) يقبل مقاربا مائل معادلته $y=x+1$ بجوار $-\infty$.

ج- لنبين أن المنحنى $(Cf)$ يوجد تحت المستقيم (D).

لدينا : $f(x)-(x+1) = -4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$

نعلم أن : $e^x>0$ و $\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2>0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

إذن : $-e^x<0$ و $-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2<0$

إذن : $-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x<0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

وبالتالي : $f(x)-(x+1)<0$

أي : $f(x)<x+1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ومنه فإن المنحنى $(Cf)$ يوجد تحت المستقيم (D).

2) أ- لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x=-\infty$

وحيث أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=-\infty$

وبالتالي : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$

ب- لنبين أن المنحنى $(Cf)$ يقبل بجوار $+\infty$، فرعا شلجميا.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لندرس $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]}{x}$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x=-\infty$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

ومنه فإن المنحنى $(Cf)$ يقبل فرعا شلجميا إتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

3) أ- لنبين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن : $f'(x)=(x+1)'-((x^2+1)e^x)'$

إذن : $f'(x)=1-[(x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)']$.

إذن : $f'(x)=1-(2x^2+2x+1)e^x$

إذن : $f'(x)=1-(x+1)^2e^x$

وبالتالي : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- بين أن الدالة $f(x)$ تزايدية على $]-\infty,0]$ وتناقصية على $[0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

- على المجال $[0,+\infty[$ لدينا $g(x)\leq 0$

إذن $f'(x)\leq 0$ وبالتالي $f$ دالة تناقصية على $[0,+\infty[$.

- على المجال $]-\infty,0]$ لدينا $g(x)\geq 0$.

إذن $f'(x)\geq 0$ وبالتالي $f$ دالة تزايدية على $]-\infty,0]$

- جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↘ $-\infty$ |

لدينا : $f(0)=(0)+1-(0^2+1)e^0=0$

ج- لنبين أن المنحنى $(Cf)$ يقبل نقطتي انعطاف

أفصولاهما 3- و 1-.

لنحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f'(x)=g(x)$ و 'f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن : $f''(x)=g(x)$

$f''(x)=(1)'-((x+1)^2e^x)'$

$f''(x)=-[((x+1)^2)'e^x+(x+1)^2(e^x)']$

$f''(x)=-[2(x+1)(x+1)'e^x+(x+1)^2(e^x)']$

$f''(x)=-[2(x+1)e^x+(x+1)^2(e^x)']$

نعمل بالتعبير $(x+1)e^x$ فنحصل على :

$f''(x)=-(x+1)(x+3)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-(x+1)(x+3)$

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+1)$ | | + | | + | 0 | - | |
| $x+3$ | | - | 0 | + | | + | |
| $f''(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

ومنه نستنتج الجدول التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| التقعر | | | I | | I' | | |

$f''(x)$ تنعدم في 3- و 1- مع تغيير الإشارة إذن المنحنى (Cf) يقبل نقطتي إنعطاف أفصولاهما 3- و 1-.

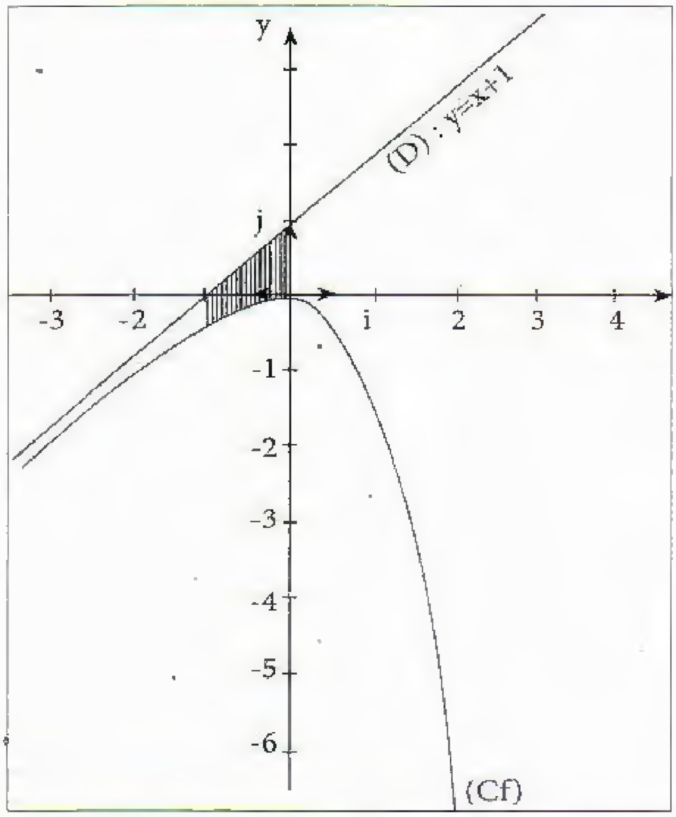
ملاحظة هامة :

لتحديد إشارة $g'(x)$ يمكننا الإستعانة بالتمثيل المبياني للدالة g.

لاحظ جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | $1-4e^{-3}$ | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ |

4) أنشاء المستقيم (D) و المنحنى (Cf).




5) أ- لنتحقق من أن $H : x\mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

لدينا : H دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن : $H'(x)=((x-1)e^x)'$

إذن : $H'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'$

إذن : $H'(x)=e^x+(x-1)e^x$

إذن : $H'(x)=(1+x-1)e^x$

إذن : $H'(x)=xe^x$

إذن : $H'(x)=h(x)$

وبالتالي H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ .

- لنبين أن $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$ .

لدينا : $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \int_{-1}^{0} h(x)dx$

بما أن H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ .

إذن : $\int_{-1}^{0} xe^x dx = [H(x)]_{-1}^{0}$

إذن : $\int_{-1}^{0} xe^x dx = H(0) - H(-1)$

وحيث أن : $H(0)=(0-1)e^0=-1$

وَ $H(-1)=(-1-1)e^{-1}=\frac{-2}{e}$

إذن : $\boxed{\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1}$

ب- المكاملة بالأجزاء، بين أن $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$ .

لدينا : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx$

نضع : $u(x)=x^2+1 \longrightarrow u(x)=2x$

وَ $v'(x)=e^x \longrightarrow v(x)=e^x$

إذن :

$$\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = [(x^2+1)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2xe^x dx$$

إذن: $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = [1-2e^{-1}] - 2\int_{-1}^{0} xe^x dx$

إذن : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = 1-\frac{2}{e}-2\left(\frac{2}{e}-1\right)$

وبالتالي : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$

ج- لنحسب المساحة :

لدينا : $(x+1)-f(x)\geq 0$ لكل x من $[-1,0]$

إذن : $A=\int_{-1}^{0}(x+1)-f(x)\,dx$

إذن: $A=\int_{-1}^{0}(x+1)-(x+1)+(x^2+1)e^x\,dx$

إذن : $A=\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$

وحيث أن الوحدة هي : 2cm

إذن المساحة هي : $A=3\left(1-\frac{2}{e}\right)\times 4\,cm^2$

أي : $\boxed{A=12\left(1-\frac{2}{e}\right)cm^2}$