حلول الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2017
مادة الرياضيات ـ شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

1ـ أـ لتكن : $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P)

و بما ان : $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فان : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$

و منه معادلة المستوى (P) تصبح : $x-z+d=0$

وبما ان : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فان : $0-1+d=0$ أي ان : $d=1$

و منه فان : $x-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).

1ـ بـ + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى $(P): \ x-z+1=0$

لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|x_\Omega-z_\Omega+1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ يعني : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|0-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}$ أي : $d(\Omega,(P))=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

و بما ان شعاع الفلكة (S) هو : $R=\sqrt{2}$ و ان : $d(\Omega,(P))=\sqrt{2}$ أي : $d(\Omega,(P))=R=\sqrt{2}$

فان : المستوى (P) مماس للفلكة (S).

+ لنتحقق من ان النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S)

- لنتحقق من كون $B\in(P)$: $-1-0+1=0$ أي ان : $0=0$ اذن : $B\in(P)$
- لنتحقق من كون $B\in(S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $R=\sqrt{2}$

أي ان : $(S): \ (x-0)^2+(y-1)^2+(z-(1))^2=\sqrt{2}^2$ أي ان : $(S): \ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$

و لدينا : $(-1)^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي أن : $2=2$ اذن : $B\in(S)$

ومنه فان : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S).

2ـ أ – لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$

و بما ان : $(\Delta)\perp(P)$ فان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P)

فان : $\begin{cases} x=0+1t \\ y=1+0t \ ; \ (t=IR) \\ z=1-1t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

2ـبـ ولدينا : $R=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}=d(\Omega,(\Delta))$ و منه (Δ) مماس للفلكة (S)

لدينا : $(S): \ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و $C(1,1,0)$

و بما أن : $1^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي $2=2$ فان : $C\in(S)$

و لدينا من جهة أخرى : $(\Delta): \begin{cases} x=0+1t \\ y=1+0t \\ z=1-1t \end{cases}$ و $\begin{cases} 1=0+1t \\ 1=1+0t \\ 0=1-1t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t=1 \\ 1=1 \\ t=1 \end{cases}$ و منه : $C\in(\Delta)$

و بالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$

3ـ + حساب $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}$

لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$ اذن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

+ حساب مساحة المثلث OCB

لدينا : $S_{OCB}=\frac{\left\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}{2}=\frac{2}{2}$ اذن : $S_{OCB}=1$

التمرين الثاني :

1- لدينا : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$ و : $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{7}$

2- أ- لدينا : $p(X=16)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

2- ب-

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega)=\{0,4,8,16\}$

لدينا : $p(X=0)=1-p(\overline{X=0})=1-\frac{C_6^3}{C_8^3}=1-\frac{20}{56}=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}$

و : $p(X=4)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

و : $p(X=8)=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$

و : $p(X=16)=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$ (حسب نتيجة السؤال السابق)

وبالتالي :

$X=x_i$	0	4	8	16
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

التمرين الثالث :

1-أ- لدينا : $(1+i)a=(1+i).(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)=b$

اذن : $b=(1+i)a$

1-ب- لدينا : $b=(1+i)a$ يعني : $|b|=|(1+i).a|=|1+i|\times|a|=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2\sqrt{2}$

لدينا : $\arg b\equiv\arg[(1+i).a]\equiv\arg(1+i)+\arg(a)$

- ولدينا : $1+i=\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}.(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ أي أن : $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
- و : $a=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2.(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ أي أن : $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

وبالتالي : $\arg b\equiv(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

1-ج- لدينا : $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$ و : $|b|==2\sqrt{2}$ يعني : $b=2\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})$

يعني : $b=2\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ وبماأن : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$ فان : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2- أ- لدينا : $ia=i.(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}i+i^2=-1+\sqrt{3}i$ اذن : $c=ia$

لدينا : $c = ia$ يعني أن : $\frac{c}{a} = i$ يعني أن : $\begin{cases} \left|\frac{c}{a}\right| = 1 \\ \frac{c}{a} = 1.(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} |c| = |a| \\ \arg\frac{c}{a} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |c-o| = |a-o| \\ \arg\frac{c-o}{a-o} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ اذن : $\begin{cases} OA = OC \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

2.ب. تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالازاحة T التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$. يعني : $T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow z' - z = c$

لدينا : + لحق المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو : $Aff(\overrightarrow{OC}) = c = ia$

+ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $Aff(\overrightarrow{AB}) = b - a = (1+i).a - a = ia$

اذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ أي : $b - a = c$

و منه فان : النقطة B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$.

2.ج. لدينا : B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$ يعني : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

أي ان : $OABC$ متوازي أضلاع

و بما أن : $OA = OC$ و ان : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2.أ)

فان : $OABC$ مربع.

المسألة :

I. 1. لدينا : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$ و : $D_g =]0,+\infty[$ و : $1 \in]0,+\infty[$

يعني : $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2\ln 1$ اذن : $g(1) = 0$

2. ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، يعني : $x \in]0,1]$ أو $x \in [1,+\infty[$

- اذا كان : $x \in]0,1]$: لدينا $x \leq 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x) \leq g(1)$
  و منه فان : $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0,1]$
- اذا كان : $x \in [1,+\infty[$: لدينا $x \geq 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x) \geq g(1)$
  و منه فان : $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1,+\infty[$

II. 1. لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x + (1 - \frac{2}{x})\ln x$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$ و $\lim\limits_{x\to0^+} 1 - \frac{2}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

فان : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

بما ان $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ فان : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.

2. أ. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + (1 - \frac{2}{x})\ln x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln x - 2\frac{\ln x}{x}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2.ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

https://sigmaths.net

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{\ln x}{x}-2\frac{\ln x}{x^2}$ وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

ولدينا من جهة اخرى : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x})\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-2\frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

3.أ- ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، ولدينا : $f(x)=x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

اذن : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+(1-\frac{2}{x}).\frac{1}{x}$ يعني : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x)=\frac{x^2++x-2+2\ln x}{x^2}$ اذن : $\forall x\in]0,+\infty[;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

3.ب- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و : $\forall x\in]0,+\infty[;\ x^2\succ 0$

اذن اشارة f' هي نفسها اشارة $g(x)$ لكل $x\in]0,+\infty[$

و حسب نتيجة السؤال (I-2) :

لدينا : $\forall x\in]0,1]\ \ g(x)\le 0$ و منه : $\forall x\in]0,1];\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\le 0$ اذن : f تناقصية على $]0,1]$

ولدينا : $\forall x\in[1,+\infty[\ \ g(x)\ge 0$ و منه : $\forall x\in[1,+\infty[\ \ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\ge 0$ اذن : f تزايدية على $[1,+\infty[$

3.ج-

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4.أ- لدينا : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $\ln x=0$ أو $1-\frac{2}{x}=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ على المجال $]0,+\infty[$ هي : $S=\{1,2\}$

لاحظ ان : $1\in]0,+\infty[$ و ان : $2\in]0,+\infty[$

4.ب - لدينا : $f(x)=x$ يعني : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

و منه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1,1)$ و $N(2,2)$

4.ج- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f(x)-x=(1-\frac{2}{x})\ln x=\frac{x-2}{x}.\ln x$

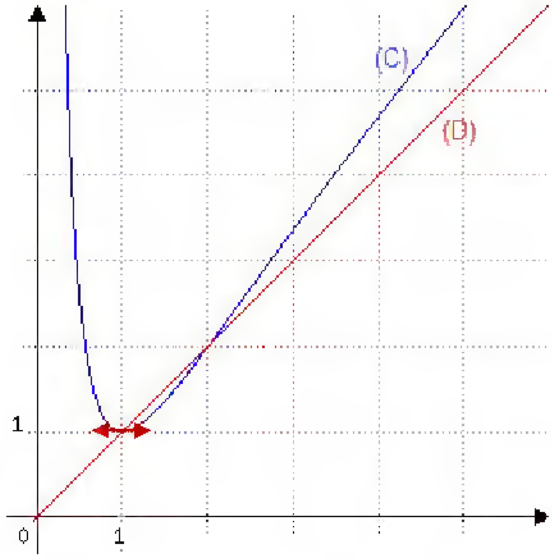
و بما أن : $\forall x\in[1,2]\ \ln x\ge 0$ و $\forall x\in[1,2]\ \ x-2\le 0$ و $\forall x\in[1,2]\ \ x\ge 0$

فان : $\forall x\in[1,2]\ \ \frac{x-2}{x}.\ln x\le 0$ أي ان : $\forall x\in[1,2]\ \ f(x)-x\le 0$

و بالتالي فان : $\forall x\in[1,2]\ \ f(x)\le x$

بما أن : $f(x) \le x \quad \forall x \in [1,2]$ فان المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$

5- تمثيل المنحنى (C) و المستقيم (D) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$



6-أ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}.\ln x.dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}.(\ln 2)^2$

6-ب لدينا : $H(x) = 2\ln x - x$ و $h(x) = \frac{2}{x} - 1$

لدينا : H دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$ (لأنها مجموع دوال متصلة على $]0,+\infty[$)

و لدينا : $H'(x) = (2\ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1$ يعني : $H'(x) = h(x)$

اذن : H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0,+\infty[$.

6-ج لدينا : $\displaystyle\int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = [(2\ln x - x).\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\ln x - x}{x}dx = (2\ln 2 - 2).\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx + [x]_1^2$

يعني : $\displaystyle\int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1$

اذن : $\displaystyle\int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$

6-د لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

لدينا : $\displaystyle\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x) - x|dx$

و حسب نتيجة السؤال (II – 4-ج) : $f(x) \le x \quad \forall x \in [1,2]$ أي أن : $f(x) - x \le 0 \quad \forall x \in [1,2]$

أي ان : $|f(x) - x| = -(f(x) - x) = (\frac{2}{x} - 1).\ln x \quad \forall x \in [1,2]$

و منه : $\displaystyle\mathcal{A} = \int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = (1 - \ln 2)^2 cm^2$

III. 1- بالنسبة ل $n = 0$: لدينا $u_0 = \sqrt{3}$ و منه $1 \le u_0 \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n = 0$)

نفترض أن : $1 \le u_n \le 2$ و نبين ان $1 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا : $1 \le u_n \le 2$ أي أن : $u_n \in [1,2] \subset]1,+\infty[$ و بما أن : f تزايدية على $]1,+\infty[$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

فان : $f(1) \le f(u_n) \le f(2)$ اي أن : $1 \le u_{n+1} \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n+1$)

https://sigmaths.net

	وبالتالي : $\forall n \in IN \ ; \ 1 \le u_n \le 2$
2.	لدينا حسب نتيجة السؤال (II.4-ج) : $\forall x \in [1,2] \ ; \ f(x) \le x$ ولدينا من جهة أخرى : $\forall n \in IN \ ; \ 1 \le u_n \le 2$ أي أن : $\forall n \in IN \ ; u_n \in [1,2]$ اذن : $\forall n \in IN \ ; \ f(u_n) \le u_n$ يعني : $\forall n \in IN \ ; \ u_{n+1} \le u_n$ وبالتالي فان المتتالية (u_n) تناقصية
3.	+ لدينا : $\forall n \in IN \ ; \ 1 \le u_n \le 2$ يعني ان المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1 وبما أن المتتالية (u_n) تناقصية فانها متقاربة. + لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[1,2]$ و : $f([1,2]) = [1,2]$ أي ان : $f([1,2]) \subset [1,2]$ وبما أن (u_n) متقاربة و $u_0 \in [1,2]$ فان النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l) = l$ وحسب نتيجة السؤال (II.4-ب) : $l = 1$ أو $l = 2$ وبما أن (u_n) تناقصية فان : $\forall n \in IN \ ; \ u_n \le u_0$ أي : $\forall n \in IN \ ; \ u_n \le \sqrt{3}$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \le \sqrt{3}$ وبالتالي فان : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

Phy.handa@gmail.com

GSM : 0661931283