

SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

Exercice 1 (3 points)

Soit m un entier relatif. On considère x et y les entiers relatifs et l'équation (E_m) :

$$24x + 9y = m.$$

- 1- Préciser la condition nécessaire et suffisante sur m pour que l'équation (E_m) ait des solutions. (0,5 pt)
- 2- On suppose $m = 3$. Résoudre l'équation (E_m) . (0,75 pt)
- 3- On suppose $m = 3q$ ($q \in \mathbb{Z}$).
Trouver en fonction de q toutes les solutions de l'équation (E_m) . (0,75 pt)
- 4- En utilisant la question 3, déterminer tous les entiers relatifs n solutions du système de congruences. (1 pt)

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 20 [24] \\ n \equiv 5 [9] \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soit I et J les points du plan tels que $\vec{OI} = \vec{u}$ et $\vec{OJ} = \vec{v}$. On note K le point du plan tel que $OIKJ$ soit un carré. M , un point quelconque de la droite (OK) différent de O et s la similitude plane directe de centre I qui transforme O en M . On note m , l'affixe du point M , J' et M' les images respectives de J et de M par s .

- 1- Montrer que $|m - 1| = |m - i|$ et que les complexes $(1 + im)(1 - m)$ et $m(1 - i)$ sont des réels non nuls. (on pourra utiliser $m = t + it$ où t est un réel non nul). (1 pt)
- 2-a/ Déterminer le rapport de s . (0,25 pt)
- b/ Exprimer $M'J'$ en fonction de m . Montrer que $M'I = |m - 1|^2$. (0,5 pt)
- c/ En déduire que $M'I = M'J'$. (0,25 pt)
- 3-a/ Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1 - m)z + m$.
En déduire que les vecteurs $\vec{JJ'}$ et $\vec{M'J'}$ ont pour affixes respectives $m(1 - i)$ et $i(1 + im)(1 - m)$. (0,75 pt)
- b/ Prouver alors que J' est le projeté orthogonal de M' sur la droite (JK) . (0,25 pt)
- c/ Montrer que dans le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ le point M' appartient à la courbe (P) d'équation $y = x - \frac{x^2}{2}$ lorsque le point M décrit la droite (OK) privée du point O . (0,25 pt)
- 4- Placer toute les données précédentes sur la figure et tracer la courbe (P) . (0,75 pt)

Problème (13 points)

A- n désigne un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n - 2\}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n+2} - e^{-x-1}.$$

- 1- Déterminer le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation. (1,25 pts)
- 2-a/ Démontrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} , $e^{n+2} > 2n + 3$.
En déduire le signe de $f_n(n + 1)$. (0,75 pt)

- b/ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions dont une positive notée u_n appartenant à $[n; n + 1]$. (0,75 pt)
- 3- Calculer les limites u_n et $\frac{u_n}{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$. (0,5 pt)

B- Dans cette partie, on prendra $n = 0$ et on note $f_0 = f$ et $u_0 = u$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse -1 . (0,5 pt)
- 2-a/ Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u . (0,25 pt)
- b/ En déduire la solution de l'équation $x \in [0; +\infty[$, $f(x-1) = 0$ en fonction de u . (0,25 pt)
- 3- Tracer (T) et (C) sur la même figure. (0,75 pt)
- 4- Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (T) , (C) et la droite d'équation $x = 0$. (0,75 pt)

C- On appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ et (γ) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$.

- 1- Dessiner (Γ) et (γ) sur la figure précédente. (0,5 pt)
- 2- Démontrer qu'il existe un unique point M_0 appartenant à (γ) tel que la tangente à (γ) en ce point passe par O . Donner les coordonnées de M_0 .
En déduire le nombre de tangentes à (Γ) passant par O . (0,75 pt)
- 3- Soit (T_a) la tangente à (Γ) au point A d'abscisse a . ($a \in \mathbb{R}$) ; (D_λ) la tangente à (γ) au point K d'abscisse λ ($\lambda > 0$).

- a/ Déterminer une équation de (T_a) et une équation de (D_λ) . (0,5 pt)
- b/ Déterminer λ en fonction de a pour que les droites (T_a) et (D_λ) soient parallèles. (0,25 pt)
- On notera b la valeur de λ ainsi obtenue, B est le point de (γ) d'abscisse b et (D_b) la tangente correspondante.

- c/ (T_{-1}) et (D_b) peuvent-elles être confondues ?
Montrer que (T_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $b = e^{-a}$ et $e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}$. (1 pt)
- 4- Montrer que l'équation $f(x-1) = 0$ si et seulement si $\frac{x-1}{x+1}e^x = 1$. (0,25 pt)

5- On pose $g(x) = \frac{x-1}{x+1}e^x$.

a/ Démontrer que l'équation, $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = 1$ admet une unique solution μ dans $[1,5; 1,6]$.

Exprimer μ en fonction de u . (1 pt)

b-i/ Pour tout réel x , différent de 1 et de -1 , calculer le produit $g(x) \cdot g(-x)$. (0,25 pt)

ii/ Déduire des questions précédentes que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$ admet deux solutions opposées. (0,25 pt)

iii/ Déterminer les tangentes communes aux courbes (Γ) et (γ) . (0,5 pt)

iv/ Tracer ces tangentes dans le repère précédent. On prendra $\mu = 1,55$. (0,5 pt)

6- Soit A le point d'abscisse μ de la courbe (Γ) , (T_μ) est donc tangente à la courbe (Γ) au point A et tangente à la courbe (γ) au point B d'abscisse $\frac{\mu-1}{\mu+1}$.

a/ Donner les ordonnées des points A et B . (0,5 pt)

b/ En utilisant la C-3-c/, montrer que (T_μ) et $(T_{-\mu})$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5 pt)

c/ En déduire les coordonnées des points de contact de (Γ) et (γ) avec $(T_{-\mu})$. (0,5 pt)