XVII. Rouen, série C

✻ Ex. 366. ./1978/rouenC/exo-1/texte.tex

1° Linéariser l'expression : $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$.

2° Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✻ Ex. 367. ./1978/rouenC/exo-2/texte.tex

Pour tout entier naturel n, calculer le reste de la division par 7 de 5^n et 4^n.
Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

☆Problème 102 ./1978/rouenC/pb/texte

Partie I-

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Á tout couple $(a,\ b)$ élément de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, on associe l'application $\varphi_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad [\varphi_{a,b}(z) = az + b(\overline{z})] \qquad (\overline{z} \text{ étant le conjugué de } z).$$

1° Donner la nature de $\varphi_{1,0}$ et de $\varphi_{-1,0}$.

2° Démontrer que $\varphi_{a,b} = \varphi_{a',b'}$, si et seulement si $(a,\ b) = (a',\ b')$.

3° Démontrer que $\varphi_{a,b}$ est involutive si et seulement si $a,\ b,\ a',\ b'$ vérifient simultanément deux relations que l'on précisera.

Partie II-

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté et $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e_2})$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$.

Soit le nombre complexe $u = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1+2\mathrm{i})$.

On désigne par f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe complexe z associe le point M_1 d'affixe complexe $z_1 = \varphi_{\frac{3}{4}\mathrm{i},1+\frac{3}{4}\mathrm{i}}(z)$ et par h l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe complexe z associe le point M_2 d'affixe complexe $z_2 = \varphi_{0,u}(z)$.

A) 1. Calculer pour tout point M de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de $M_1 = f(M)$ et les coordonnées $(x_2\ ;\ y_2)$ de $M_2 = h(M)$.

2. Démontrer que f est une application affine involutive. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.

3. Démontrer que h est une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on déterminera une équation.

B) Á tout nombre réel θ on associe $g_\theta = f \circ r_\theta \circ f$, où r_θ est la rotation de centre O et dont une détermination de la mesure de l'angle est θ. Soit

$$\mathscr{G} = \{g_\theta \mid \quad \theta \in \mathbb{R}\}.$$

1. a) Montrer que $\mathscr{G}$ est stable pour la loi $\circ$.

b) Démontrer que $\mathscr{G}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe commutatif.

2. On définit dans $\mathscr{P}$ la relation $\mathscr{R}$ par :

$$(\forall (M,\ N) \in \mathscr{P}^2 \quad \left[M\mathscr{R}N \Longleftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R} \quad N = g_\theta(M)\right].$$

Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

3. Déterminer la classe d'équivalence du point O par la relation $\mathscr{R}$.

4. Soit A le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$.

a) Démontrer que les coordonnées de $g_\theta(A)$ sont

$$(2\sin\theta\ ;\ 3\sin\theta + 2\cos\theta).$$

b) Donner une équation de la classe d'équivalence Γ_A du point A par la relation $\mathscr{R}$.

c) On considère les deux fonctions numériques de variable réelle F_1 et F_2 définies par : $F_1(x) = \frac{3}{2}x + \sqrt{4-x^2}$ et $F_2(x) = \frac{3}{2}x - \sqrt{4-x^2}$.
On appelle C_1 et C_2 leurs courbes représentatives respectives dans $\mathscr{P}$ muni du repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Montrer que $\Gamma_A = C_1 \cup C_2$. Étudier F_1 et F_2 et tracer Γ_A. (On prendra $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 2$, (unité le cm) et 3,6 comme valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{13}$).

5. Déterminer une équation de Γ', transformée de Γ par h.
Quelle est la nature de Γ'_A ? Tracer Γ'_A sur la même feuille que Γ_A.
Quelle est la nature de Γ_A ?

XVIII. Strasbourg, série C

Ex. 368. ./1978/strasbourgC/exo-1/texte.tex

n désigne un entier naturel.

1° Démontrer que n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par $n+1$.

2° Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $3n^2+15n+19$ est divisible par $n+1$.

3° En déduire que, quel que soit n, $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2.

Ex. 369. ./1978/strasbourgC/exo-2/texte.tex

e représente la base des logarithmes népériens.

1° Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ qu'on notera I.

2° Calculer I.

3° n étant un entier naturel non nul, on pose

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} + \cdots + \frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{n}}.$$

Montrer que $S(n)$ a une limite lorsqu'on fait tendre n tend vers $+\infty$. Préciser cette limite.

Retour page 1

Chapitre 19

1979.

Sommaire

I. Aix Marseille, série C

Ex. 370. *4 points.* *./1979/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et f l'application de $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z)=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que f applique bijectivement $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$ sur $\mathbb{C}-\{1\}$.
2. Quelle est l'image par f de l'ensemble **P** des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive ?

Ex. 371. *4 points.* *./1979/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. x étant un réel strictement positif on considère le point M de $\mathcal{C}$ qui a pour abscisse x et l'on désigne par m le coefficient directeur de la droite (OM).
   Construire la tableau de variation de la fonction continue
   $$\begin{aligned}\mu : \mathbb{R}_+^{\star} &\longrightarrow \mathbb{R}.\\ x &\longmapsto m\end{aligned}$$
2. Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b telles que $a<b$.
   Démontrer que, si $a^b=b^a$, A et B sont alignés avec O et que $a<\mathrm{e}$.
3. Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a,\ b)$ tels que
   $$a<b \quad \text{et} \quad a^b=b^a.$$

☆**PROBLÈME 103** *12 points.* ./1979/aixmarseilleC/pb/texte

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E orthonormé directe, $\mathbf{I}_E$ l'application identité de E et r la rotation vectorielle de E qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{j}$.

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à E, muni d'un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(1~;~0)$ et $B(-1~;~0)$ et les cercles a et b passant par O de centres respectifs A et B.

Dans tout le problème on associe à chaque point P du cercle a le point Q du cercle b tel que les angles $\left(\widehat{\vec{i}\,;\overrightarrow{AP}}\right)$ et $\left(\widehat{\vec{j}\,;\overrightarrow{BQ}}\right)$ soient égaux. On notera M le milieu du segment $[PQ]$.

I- 1. Montrer que : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}\right)$ et que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se déduit du vecteur $\overrightarrow{AP}$ par l'application linéaire : $\sigma = \dfrac{1}{2}(\mathbf{I}_E + r)$.

Former la matrice de σ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et reconnaître que σ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une rotation vectorielle.

2. Démontrer que, quel que soit le point P sur le cercle a, le point M s'en déduit par une similitude directe fixe Σ dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.

Étudier l'ensemble des points M associés aux points P du cercle a.

II- Soit θ une détermination de la mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{i}\,;\overrightarrow{AP}}\right)$. Calculer en fonction de θ les coordonnées $(x~;~y)$, $(x'~;~y')$, $(X~;~Y)$ des points P, Q, M.

Puis calculer X et Y en fonction de x et y. Retrouver les résultats de la question I2

III- Étudier l'ensemble S des distances PQ associées aux points P de cercle a. Démontrer que S est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

IV- Étudier l'ensemble T des coefficients directeurs des droites (PQ) associées aux points P du cercle a.

Démontrer que T est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

V- Soit K un point fixe de $\mathscr{E}$ et k le nombre de droites (PQ) passant par K.

1. Quel est l'ensemble des nombres k ainsi associés aux points K de $\mathscr{E}$?
2. Déterminer l'ensemble des points K de $\mathscr{E}$ pour lesquels $k = 1$.

N.B. *Les questions III, IV et V sont indépendantes les unes des autres.*
Les questions III et IV peuvent être étudiées géométriquement ou par le calcul.

II. Besançon, série C

✻ Ex. 372. *4 points.* ./1979/besançonC/exo-1/texte.tex

1° On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation $z^3 - \mathrm{i} = 0$.
Donner chaque racine sous sa forme trigonométrique. Trouver la somme et le produit des deux racines qui ne sont pas imaginaires pures.

2° Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - \mathrm{i} = 6(z + \mathrm{i})$.

✻ Ex. 373. *4 points.* ./1979/besançonC/exo-2/texte.tex

On considère une fonction numérique f définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et la fonction G définie sur $[0\,;+\infty[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1° Justifier rapidement que G est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. A quoi est égal $G'(0)$?

2° a) On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}G(x) & \text{si } x > 0 \\ F(0) = f(0). & \end{cases}$$

Retour page 1

Démontrer que F est continue sur $[0\,;+\infty[$. (Pour démontrer la continuité de F au point 0, on pourra utiliser le fait que G est dérivable en 0.)

b) Démontrer que, sur $]0\,;+\infty[$, F est dérivable et exprimer $F'(x)$ pour $x>0$.

3° Déterminer F dans les cas suivants :

$$f(t)=t\sin t \qquad ; \qquad f(t)=\frac{2t+e^t}{t^2+e^t}.$$

✰Problème 104 *12 points.*

./1979/besançonC/pb/texte

Soit E l'espace vectoriel euclidien réel rapporté à la base orthonormé direct $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit (H) l'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées vérifient :

$$x^2+y^2-z^2=1 \qquad \text{où} \qquad \vec{V}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

-A- 1° Soit r la rotation vectorielle de E d'axe $\vec{k}$ et dont la restriction au plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ a pour matrice dans cette base $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

Exprimer x', y', z' de $r(\vec{v})$ en fonction des coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ de $\vec{v}$ appartenant à E.

2° Soit s l'endomorphisme de E défini analytiquement dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ par

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=bx-ay \\ z'=z. \end{cases} \qquad \text{avec } a^2+b^2=1$$

Vérifier que s est une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant $\vec{k}$.

-B- 1° a) Soit $\mathscr{J}$ l'ensemble des isométries vectorielles f conservant globalement (H).

Montrer que l'image $f(\vec{V})$ de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ d'un vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ de (H) est telle que $z'=z$ ou $z'=-z$.

b) Soit P le plan d'équation engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Montrer que si f appartient à $\mathscr{J}$, f transforme un vecteur de P en un vecteur de P. En déduire que $f(\vec{k})$ vaut $\vec{k}$ ou $-\vec{k}$.

2° $\mathscr{J}_1$ étant le sous-ensemble de $\mathscr{J}$ des isométries telles que $z'=z$, quelle est la nature des éléments de $\mathscr{J}_1$? (On pourra classer ces isométries suivant le sous-espace de leurs invariants).

3° Soit $\mathscr{J}_2$ le complémentaire de $\mathscr{J}_1$ dans $\mathscr{J}$.

a) On appelle δ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\left[\vec{i},\ \vec{j}\right]$. g étant une application quelconque de $\mathscr{J}_2$, donner les natures à priori possibles $\delta\circ g$. (On regardera à quoi est égal $\delta\circ g(\vec{k})$).

b) En déduire la nature des éléments de $\mathscr{J}_2$.

4° a) Montrer que $(\mathscr{J}_1,\ \circ)$ a une structure de groupe, $\circ$ étant la loi de composition des applications. Ce groupe est-il commutatif ?

b) En est-il de même pour $(\mathscr{J}_2,\ \circ)$?

-C- 1° On considère l'application linéaire ψ de E dans E définie par

$$\begin{aligned} \psi(\vec{i}) &= 2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} \\ \psi(\vec{j}) &= \vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k} \\ \psi(\vec{k}) &= 2\vec{i}+2 vecteur j+3\vec{k} \end{aligned}$$

Vérifier que l'image (H) par ψ est incluse dans (H).

2° Soit $\vec{V}$ de (H) à coordonnées entières. Que peut-on dire des coordonnées de $\psi(\vec{V})$?

3° Montrer qu'il existe une infinité de points de (H) dont les coordonnées sont des entiers naturels strictement supérieur à 1.

III. Canada USA, série C

✻ Ex. 374. ./1979/canada-usaC/exo-1/texte.tex

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation en z

$$z^6 - 9iz + 18 - 26i = 0 \tag{1}$$

et l'équation en Z :

$$Z^3 - 1 = 0. \tag{2}$$

1° Montrer que $(2+i)$ et $(1-i)$ sont des racines de l'équation (1).

2° Résoudre l'équation (2).

3° Montrer que si z_0 est racine de (1) et Z_0 est une racine de (2), alors z_0Z_0 est racine de (1). En déduire l'ensemble des racines de l'équation (1).

IV. Centre Outre Mer, série E

✻ Ex. 375. ./1979/centreoutremerE/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien. Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$. A tout point M de $\mathscr{P}$ on associe :

$$I = \text{milieu de } (A, M); \qquad J = \text{milieu de } (B, M);$$
$$E = \text{milieu de } (A, J); \qquad F = \text{milieu de } (B, I).$$

soit f l'application affine qui à M associe E et g l'application qui à M associe F.

1° Montrer que f et g sont des homothéties affines dont on donnera les centres et les rapports.

2° Soit C un point de $\mathscr{P}$.

On pose :

$$E_0 = C \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ E_n = f(E_{n-1})$$
$$F_0 = C \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ F_n = g(F_{n-1}).$$

On pose également $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n = distance de E_n à F_n.

Calculer la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

✻ Ex. 376. ./1979/centreoutremerE/exo-2/texte.tex

Dans l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère un point mobile M dont la position, au temps t, est définie par ses coordonnées :

$$t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = 1 + \cos 2t \\ y(t) = \cos 2t \\ z(t) = \sin^2 t. \end{cases}$$

1° Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ au temps t.

Ces vecteurs sont-ils liés ? (On pourra écrire la relation indépendante de t entre y et z.)

2° Préciser la trajectoire $(\mathscr{C})$ du point mobile M et retrouver le résultat précédent.

3° Décrire le mouvement du point mobile M pour $t \in [0\,;\pi]$.

V. Clermont, série C

✻ Ex. 377. ./1979/clermontc/exo-1/texte.tex

A tout réel m, élément de $]0\,;1[$ on associe, dans un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la conique (E_m) d'équation

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}.$$

1° Construire la courbe $(E_{\frac{3}{4}})$.

2° Quelle est la nature de (E_m) ?

Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ le centre et les sommets de (E_m).

Déterminer et tracer la courbe (S) constituant l'ensemble des sommets du grand axe de (E_m) quand m varie dans l'intervalle indiqué.

3° Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les foyers de (E_m).

Déterminer et tracer la courbe (C) constituant l'ensemble de ces foyers quand m varie dans l'intervalle indiqué.

✻ Ex. 378. ./1979/clermontc/exo-2/texte.tex

Deux urnes A et B contiennent des boules numérotées. Dans l'urne A, il y a deux boules : une porte le numéro a, l'autre porte le numéro 1. Dans l'urne B, il y a trois boules : une porte le numéro b, les deux autres le numéro -1. a et b sont deux entiers relatifs.
On tire au hasard [1] une boule de l'urne A et une boule de l'urne B et on calcule la somme des numéros portés par chacune des deux boules tirées.
On définit ainsi une variable aléatoire réelle X.

1° Calculer, en fonction de a et b, l'espérance mathématique de X.

2° Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ d'entiers relatifs tels que l'espérance mathématique de X soit nulle.

3° Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ d'entiers relatifs tels que les deux condition suivantes soient remplies :

– l'espérance mathématique de X est nulle ;

– l'écart type de X est inférieur ou égal à 2.

☆Problème 105 ./1979/clermontc/pb/texte

N.B- *les parties A, B et C sont indépendantes* Soit $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ un repère cartésien du plan affine (P). On désigne par f une application affine de (P) dans (P) telle que φ a pour matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ du plan vectoriel $(\vec{P})$ associé à (P).

– A – *Dans cette partie*, on suppose que $\varphi(\vec{i} + \vec{j}) = (a+b)(\vec{i} + \vec{j})$ et que $b \neq 0$.

1° Calculer c et d en fonction de a et b.

2° Trouver une équation de l'ensemble des points M de (P) tels que M, $f(M)$ et le point A défini par $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$ soient alignés.

Discuter la nature de cet ensemble suivant la valeur de a et b en supposant le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormé.

3° Soit $\vec{E}_k = \{\vec{u} \in (\vec{P})\ /\ \varphi(\vec{u}) = k\vec{u},\quad k \in \mathbb{R}\}$. Calculer k pour que $\vec{E}_k$ soit différent de $\{\vec{0}\}$. Déterminer $\vec{E}_k$ pour ces valeurs de k.

4° On pose $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$. Quelle est la matrice de φ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$?

On pose $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et, plus généralement $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star - \{1\}$.

Donner en fonction de $\alpha = a + b$ et $\beta = a - b$ la matrice de φ^n dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$.

En déduire les coordonnées de $f^n(A)$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ en fonction de a, b et n.

– B – *Dans cette partie*, on suppose que $f \circ f = f_0$ et que $f \neq f_0$, f_0 étant l'application affine qui à tout point M de (P) fait correspondre le point O.

1. Cela signifie que les couples de numéros possibles sont d'égale probabilité.

Retour page 1

1° Lorsque $b = 1$, calculer c et d en fonction de a et démontrer que l'image de (P) par f est une droite (Δ) passant par O telle que sa droite vectorielle associée soit le noyau de φ noté $\ker\varphi$.

2° Dans le cas général, démontrer que $\varphi(\overrightarrow{P})$, image de φ, est incluse dans $\ker\varphi$.
En déduire que $\ker\varphi$ puis $\varphi(\overrightarrow{P})$ sont de dimension 1. Retrouver ainsi le résultat du B1.

3° Soit M_0 un point de (P) et (D) la droite de (P), parallèle à (Δ) passant par M_0.
Montrer que, quel que soit le point M de (D), $\varphi(\overrightarrow{M_0M}) = \overrightarrow{0}$.
En déduire l'image de (D) par f.

— C — On suppose dans cette partie que

$$f \circ f \circ f = f^3 = f_0 \qquad \text{et} \qquad f \circ f = f^2 \neq f_0.$$

1° $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur de $(\overrightarrow{P})$ tel que $\varphi^2(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$, prouver qu'il n'existe pas de réel k tel que $\varphi(\overrightarrow{u}) = k\overrightarrow{u}$.
En déduire qu'il existe deux réels λ et λ' tels que

$$\varphi^2(\overrightarrow{u}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{u}) + \lambda'\overrightarrow{u}.$$

2° Calculer $\varphi^3(\overrightarrow{u})$ en fonction de λ, λ', $\overrightarrow{u}$ et $\varphi(\overrightarrow{u})$.
Que peut-on en déduire pour λ et λ' puis $\varphi^2(\overrightarrow{u})$?
Existe-t-il une application f telle que l'on ait à la fois $f^3 = f_0$ et $f^2 \neq f_0$?

VI. Groupe I, série C

Ex. 379. ./1979/groupeIC/exo-1/texte.tex

Soit α, β et γ trois réels donnés deux à deux distincts. a, b, c sont trois paramètres réels, on leur associe la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^3}{x+\alpha} + \frac{bx^3}{x+\beta} + \frac{cx^3}{x+\gamma}.$$

1° Former des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur a, b, c, pour que la fonction f admette un limite quand x tend vers $+\infty$.
(Aucune autre étude concernant la fonction f n'est demandée.) On posera éventuellement :

$$h(x) = \frac{a\alpha^3}{x+\alpha} + \frac{b\beta^3}{x+\beta} + \frac{c\gamma^3}{x+\gamma}.$$

2° Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\left[\dfrac{\beta-\gamma}{x+\alpha} + \dfrac{\gamma-\alpha}{x+\beta} + \dfrac{\alpha-\beta}{x+\gamma}\right]\right)$.

3° En utilisant à nouveau la fonction f, montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Ex. 380. ./1979/groupeIC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x \cos x.$$

1° Calculer la dérivée f' de f et mettre $f'(x)$ sous la forme

$$f'(x) = Ae^x \cos(x+a),$$

A et a étant deux constantes que l'on calculera.

2° Calculer la dérivée huitième de f.

3° Déterminer une fonction F vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F(0) = \frac{1}{2}.$$

Application : Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} e^t \cos t \,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$

✰Problème 106

./1979/groupeIC/pb/texte

le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, noté (ω). On désigne par H la courbe du plan P dont une équation dans (ω) est $y^2 - 3x^2 = 1$.

A) 1° Sur une figure réalisée avec l'unité 1 cm, tracer H.

Soit $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right)$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right)$. Que représentent les droites $(O,\ \vec{u})$ et $(O,\ \vec{v})$ pour H ? (On placera sur la figure les représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine O.

Le repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ étant noté (Ω), écrire les relations de passage entre les coordonnées $x,\ y$ d'un point M de P dans (ω) et les coordonnées $X,\ Y$ de ce point dans (Ω). Former une équation de H dans (Ω).

2° On désigne par H^+ la partie de H située dans le demi-plan $y > 0$; à chaque point M de H^+ on associe son abscisse $X = \varphi(M)$ dans (Ω).

Montrer que φ est une bijection de H^+ sur $\mathbb{R}_+^\star$; exprimer inversement en fonction de X les coordonnées $x,\ y$ dans (ω) du point $\varphi^{-1}(X)$.

3° Soit $(M,\ M')$ un bipoint de H^+, M (resp. M') admettant dans (ω) les coordonnées $(x,\ y)$ (resp. $(x',\ y')$. On pose

$$\delta(M,\ M') = xy' - x'y. \tag{1}$$

Si $X = \varphi(M)$, $X' = \varphi(M')$, démontrer

$$\delta(M,\ M') = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{X}{X'} - \frac{X'}{X}\right) \tag{2}$$

B) L'objet de cette partie est d'étudier le sous-ensemble E de H^+ formé des points de H^+ dont les coordonnées dans (ω) sont entières $[(x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+]$. On placera à titre d'essai les points de E dont les carrés des deux coordonnées sont inférieurs à 50.

Soit τ l'application affine de P dans P dont les équations dans (ω) sont

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$$

On pose $a = 2 + \sqrt{3}$.

Si A, B, C sont trois points de H^+, on convient de dire que B est « entre A et C » si le réel $\varphi(B)$ est compris entre les réels $\varphi(A)$ et $\varphi(C)$.

1° Démontrer que τ conserve H, que τ conserve H^+, que τ conserve E. Vérifier

$$(\forall x \in \mathrm{H}^+) \qquad \varphi\left[\tau(M)\right] = a.\varphi(M).$$

2° Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ on pose $A_k = \varphi^{-1}(a^k)$.

Montrer que tous les points A_k appartiennent à E.

Calculer $\delta(A_k,\ A_{k-1})$ et $\delta(A_k,\ A_{k+1})$.

3° L'entier k étant fixé, utiliser $\delta(A_k,\ M)$ pour prouver que A_k est le seul point de E entre A_{k-1} et A_{k+1} sur H^+. (On observera, sous la forme (1), que si $M \in$E, $\delta(A_k,\ M)$ est entier, et sous la forme (2) que $X = \varphi(M)$ et $\delta(A_k,\ M)$ varient en sens contraires.) Quelle est l'image de E par φ ?

C) L'objet de cette partie est d'examiner l'ensemble G des bijections affines de P telles que $g(O) = O$ et $g(E) = E$.

1° Montrer que $(\mathrm{G}, \circ)$ est un groupe.

2° Montrer que les seuls éléments de G *conservant* le point A_0 sont l'application identique de P et la symétrie orthogonale σ d'axe $(O,\ \vec{\jmath})$. A cet effet, en supposant que $g \in$G et $g(A_0) = A_0$, on étudiera l'action de g sur le bipoint $(A_k,\ A_{-k})$.

3° Soit g un élément quelconque de g. On désigne par A_m l'image $g(A_0)$. Que peut-on dire de $\tau^{-m} \circ g$? Montrer que g est soit τ^m, soit $\tau^m \circ \sigma$.

Retour page 1

VII. Guyane, séries C et E

✻ Ex. 381. ./1979/guyaneCE/exo-1/texte.tex

Soit, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^3 + z^2(\mathrm{i} - 9) + 2z(13 - 3\mathrm{i}) - 24 + 9\mathrm{i} = 0.$$

1° Démontrer que cette équation admet une solution réelle. En déduire l'ensemble des solutions.

2° Montrer que les images des solutions de l'équation, dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, forment un triangle isocèle.

VIII. Nancy Metz, série C

✻ Ex. 382. ./1979/nancyC/exo-1/texte.tex

1° Trouver les nombres complexes z tels que

$$z^2 + (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i} = 0.$$

2° Déduire du 1 les solutions dans $\mathbb{C}$ des trois équations suivantes :

a) $z^2 + (1 - \mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$;

b) $1 + (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i}z^2 = 0$;

c) $z^4 + (1 + \mathrm{i})z^2 + \mathrm{i} = 0$.

✻ Ex. 383. ./1979/nancyC/exo-2/texte.tex

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, et soit $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de E.
On désigne par P la plan affine de E d'équation

$$x + y + z = 3,$$

et par D la droite affine passant par le point A de coordonnées (0 ; 3 ; 0) et dirigée par $\vec{\jmath} - \vec{k}$.

1° Montrer que D est située dans P.

2° Montrer qu'il existe un unique plan affine P_1 tel que la symétrie s_D orthogonale d'axe D soit la composée de la symétrie s_P orthogonale par rapport à P par la symétrie s_{P_1} orthogonale par rapport à P_1.
Donner une équation cartésienne de P_1.

3° Soit P_2 le plan parallèle à P_1 passant par O.

a) Donner une équation cartésienne de P_2.

b) Déterminer les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur P_2.

c) Déterminer sans nouveaux calculs $s_{\mathrm{P}_2} \circ s_{\mathrm{P}_1}$ où l'on désigne par s_{P_2} la symétrie par rapport à P_2.

✩Problème 107 ./1979/nancyC/pb/texte

A) Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = x - 1 - \log x,$$

où la notation $\log x$ désigne le logarithme népérien de x.

1° Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé Oxy, en précisant notamment les branches infinies.

2° Soit h un nombre réel donné tel que $0 < h \leqslant 1$.

i. Calculer l'aire $A(h)$ du domaine D_h formé des points dont les coordonnées (x, y) vérifient les inégalités

$$h \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

ii. Calculer la limite de $A(h)$ quand $h > 0$ tend vers 0.

3° De l'étude de f, déduire que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité

$$\log x \leqslant x - 1. \tag{1}$$

B) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On donne n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et on pose

$$u = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\ ;$$
$$v = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\ ;$$
$$\frac{n}{w} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Les nombres u, v et w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1° a) En appliquant l'inégalité (1) successivement pour

$$x = \frac{a_1}{u},\ x = \frac{a_2}{u},\ \dots,\ x = \frac{a_n}{u}$$

et en combinant les n inégalités obtenues, montrer que

$$v \leqslant u. \tag{2}$$

b) Dans quel cas a-t-on $v = u$?

2° a) En remplaçant dans (2) les n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ par leurs inverses, prouver que

$$w \leqslant v. \tag{3}$$

b) Dans quel cas a-t-on $w = v$?

N.B. – les parties C) et D) ci-après sont indépendantes.

C) Soit x un nombre réel supérieur à zéro. On prend

$$n = 2,\ a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_2 = x.$$

Dans ce cas les inégalités (2) et (3) donnent

$$\frac{2x}{1+x} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2}.$$

On se propose prendre comme valeur approchée de $\sqrt{x}$ la moyenne arithmétique $m(x)$ des nombres $\dfrac{2x}{1+x}$ et $\dfrac{1+x}{2}$.

1° Pour étudier la précision de cette approximation, tracer la courbe représentative de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{4(x+1)} - \sqrt{x},$$

pour x réel supérieur à zéro. N.B. –*Pour discuter du signe de la dérivée de g, on pourra poser $\sqrt{x} = 1 + t$ et constater que $g(x)$ passe par un minimum pour $x = 1$.*

2° En déduire que, pour $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$, on a

$$0 \leqslant m(x) \leqslant \frac{3}{1\,000}.$$

D) 1° En appliquant l'inégalité (2), montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{n}.$$

2° a) Par des considérations d'aires, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\frac{n}{1 + \log n} \leqslant \sqrt[n]{n!}.$$

Retour page 1

IX. Orléans, série C

✻ Ex. 384. ———— *4 points.* *./1979/orleansC/exo-1/texte.tex*

On considère le nombre complexe $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{7}$.

1° On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$. Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.

2° Calculer $S + T$, ST puis en déduire S et T

✻ Ex. 385. ———— *points.* *./1979/orleansC/exo-2/texte.tex*

1° a) Trouver tous les couples (p, q) d'entiers relatifs tels que $11p - 9q = 2$.

b) En déduire les entiers relatifs X qui vérifient

$$\begin{cases} X \equiv -1\ [9] \\ X \equiv -3\ [11]. \end{cases}$$

2° Soit $N = \overline{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0}$ un nombre entier naturel écrit en base dix.

a) Quelles relations doivent vérifier $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ pour que N soit divisible par 99 ?

b) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $N = \overline{10x0009y}$ soit divisible par 99.

✩Problème 108 *points.* *./1979/orleansC/pb/texte*

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien, $\vec{\mathrm{P}}$ le plan vectoriel associé à P, $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P.

A) 1° Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de g ; en déduire les variations de g, démontrer que g permet de définir une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

2° Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}.$$

Étudier la fonction f ; étudier la position de la courbe représentative de f, C_f, par rapport à ses asymptotes, puis construire C_f dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On représentera l'unité par deux centimètres.)

3° Déduire de l'étude précédente l'existence d'un intervalle E de $\mathbb{R}$, à préciser, tel que f permette de définir une bijection de $\mathbb{R}$ sur E.
Vérifier que la bijection réciproque (que l'on notera abusivement f^{-1}) est telle que, pour tout x de E :

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x\,;$$

tracer la courbe de $C_{f^{-1}}$ représentant f^{-1} dans $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4° Justifier l'existence des réels suivants :

$$A = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad B = \int_{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x, \qquad C = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Calculer B, interpréter graphiquement le réel B.

b) En déduire C, puis A.

B) Dans cette partie, $\vec{P}$ est orienté, et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormé directe.

1° Établir une équation cartésienne de C', image de C_f par la symétrie de centre Ω, Ω ayant pour coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

2° En déduire une équation cartésienne de $H = C' \cup C_f$ et construire H dans P rapporté au repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

3° Soit s l'application affine de P dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z' = \left(\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)z + \mathrm{i}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\vec{P}$ associé à s.

a) Quelle est la nature de s ? donner ses éléments caractéristiques.

b) Vérifier que $\Omega = s(O)$; soit $\vec{I} = \varphi(\vec{i})$, $vecteurJ = \varphi(\vec{j})$. Établir une équation cartésienne de H dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$.
En déduire la nature de H.

X. Orléans remplacement, série C

Ex. 386. ——— *4 points.* *./1979/orleansCrem/exo-1/texte.tex*

1° Étudier la fonction f $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

et tracer sa représentation graphique.

2° Montrer qu'il existe un unique couple (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x < y.$$

3° Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on pose

$$u_n = \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} + \cdots + \frac{\log n}{n}\ ;$$

a) comparer u_n à $\displaystyle\int_3^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$;

b) en déduire la limite de la suite (u_n), $n \geqslant 3$, lorsque n tend vers l'infini.

Ex. 387. ——— *points.* *./1979/orleansCrem/exo-2/texte.tex*

1° Dans le système décimal, déterminer le chiffre des unités de 2^n et de 7^n, suivant les valeurs de n.

2° *Application :* Trouver le chiffre des unités du nombre $3\,548^9 \times 2\,537^{31}$.

Problème 109 *points.* *./1979/orleansCrem/pb/texte*

Les notations et résultats donnés dans l'énoncé de la partie A) sont utiles dans les questions B2, B3, B4 de la partie B)

Soit j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité $1 + j + j^2 = 0$.

A) $\mathbb{C}$ est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathscr{B}(1, \mathrm{i})$.
Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre complexe $\varphi(z) = x + jy$.

1° Montrer que φ est une application linéaire bijective.

2° Pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, on pose $N(z) = |\varphi(z)|^2$.
Montrer que

$$N(x + \mathrm{i}y) = x^2 - xy + y^2.$$

Retour page 1

3° Soit Ω l'ensemble des complexes z vérifiant $N(z) = 1$

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \quad ; \quad N(z) = 1\}.$$

Soit Ω' l'ensemble des éléments de Ω dont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont des entiers relatifs.

$$\Omega' = \{z \in \Omega \quad ; \quad \exists (x,\ y) \in \mathbb{Z},\ z = x + iy\}.$$

a) Montrer que si $z = x + iy$ appartient à Ω', alors

$$|x| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |y| \leqslant 1.$$

b) En déduire que Ω' est formé de six éléments que l'on déterminera.

c) Déterminer $\varphi(\Omega')$. Donner le module et un représentant de l'argument de chaque élément de $\varphi(\Omega')$. Montrer que $\varphi(\Omega')$ est un groupe multiplicatif commutatif.

B) Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Un point M de $\mathscr{P}$ est repéré par ses coordonnées $(x,\ y)$ dans $\mathscr{R}$ ou par son affixe $z = x + iy$.

1° Montrer que l'image d'une ellipse de foyers F et F', de grand axe de longueur $2a$ par une isométrie affine est une ellipse dont on précisera les foyers et la longueur du grand axe.

2° Soit E l'ellipse dont une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ est

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}y^2 = 1.$$

a) Déterminer les foyers et la longueur du grand axe de E.

b) Trouver une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ de l'image de E par la rotation de centre Oet dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ (en radians).

c) On appelle Γ (resp. Γ') l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe appartient à Ω (resp Ω') (Ω et Ω' définis au A).
Déduire du B(2)b) la nature de Γ. Dessiner Γ et Γ'.

3° Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels, de déterminant égal à 1.

Soit F l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $F(0) = 0$ et dont l'application linéaire associée a pour matrice A dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.
Si M a pour affixe z, on notera $f(z)$ l'affixe de $F(M)$.

a) Montrer que, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, $N(f(z)) = N(z)$.
En déduire que $F(\Gamma)$ est inclus dans Γ.

b) Montrer que pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$ on a

$$\varphi(f(z)) = (a + jb)\varphi(z).$$

En déduire que, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$,

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = (a + jb)z.$$

c) Soit Φ l'application ponctuelle associée à l'application complexe φ. (Si M a pour affixe z, $\Phi(M)$ a pour affixe $\varphi(z)$).
Déduire du B(3)b) la nature de l'application $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$. En préciser les éléments caractéristiques.

d) Soit G une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. On pose $G^1 = G$ et pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}^\star$, $G^{n+1} = G \circ G^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que G^n est égale à l'application identique de $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\Phi \circ G^n \circ \Phi^{-1}$ est égale à l'application identique de $\mathscr{P}$.

4° Soit A_0 le point de coordonnées (1, 0 dans $\mathscr{R}$. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^\star$, on pose $A_n = F^n(A_0)$.
Soit S l'ensemble des points A_n quand n décrit $\mathbb{N}$.

i. Montrer que, si $a = b = 1$, alors S= Γ'.

ii. Montrer que S est inclus dans Γ' si, et seulement si, $a + ib$ appartient à Ω'.
Préciser l'ensemble des éléments de Ω' pour lesquels l'inclusion est une égalité.

XI. Paris, série C

✻ Ex. 388. ./1979/parisC/exo-1/texte.tex

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a,\ b\}$ vérifiant

$$m - 18d = 791$$

où m est le P.P.C.M et d le P.G.C.D des nombres a et b.

✻ Ex. 389. ./1979/parisC/exo-2/texte.tex

Le but de cet exercice est le calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^5 x}.$$

Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n+1} x}.$$

1° Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right],\ \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}.$$

2° Montrer, par une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

3° En déduire le calcul de I.

N.B. On ne donnera pas de valeur décimale approchée de I_0 ou de I_1.

✰Problème 110 ./1979/parisC/pb/texte

Soit un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point M de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère choisi, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ qu'on appelle son affixe.
Soit F l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes) qui à z fait correspondre

$$z' = \frac{z}{1+|z|}$$

et soit Φ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z'.
Pour les figures et les représentations graphiques on pourra prendre 2 cm d'unité.

A) 1. On pose $z_1 = -2$ et $z_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Soit M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 et z_2. Déterminer $z_1' = F(z_1)$, $z_2' = F(z_2)$ et placer sur une figure $\mathscr{F}$ les points M_1, M_2, $M_1' = \Phi(M_1)$, $M_2' = \Phi(M_2)$.

2. a) Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

Étudier les variations de f ; on étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité. Représenter graphiquement f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(\Omega,\ \vec{i},\ \vec{j})$; déterminer les asymptotes.

b) On désigne par $\mathscr{D}_0$ la droite $(O,\ \vec{u})$ de $\mathscr{P}$. Montrer que $\Phi(\mathscr{D}_0)$ est une partie de $\mathscr{D}_0$ que l'on déterminera ; montrer que la restriction de Φ à $\mathscr{D}_0$ est une application injective. Si M et N sont deux points distincts de $\mathscr{D}_0$, quelle est l'image par Φ du segment $[MN]$?

3. Soit r une rotation de $\mathscr{P}$ de centre O. Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P}$

$$\Phi(r(M)) = r(\Phi(M)).$$

(On pourra associer à r une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, de la forme $z \longmapsto az$, a nombre complexe convenable).

4. Déterminer $\Phi(\mathscr{P})$; montrer que l'application Φ est injective.
   De même déterminer $F(\mathbb{C})$ et montrer que F est injective.

B) Soit Δ l'application de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui au couple $(M,\ N)$ de points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs $(m,\ n)$ fait correspondre

$$\Delta(M,\ N) = |F(m) - F(n)| = \left|\frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|}\right|.$$

1. M_1 et M_2 étant définis en A1, calculer :

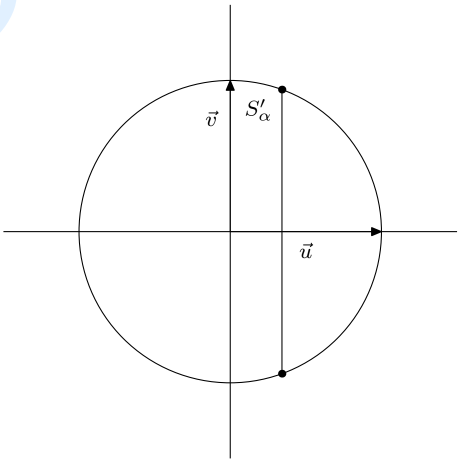
$$\Delta(O,\ M_1),\ \Delta(O,\ M_2),\ \Delta(M_1,\ M_2).$$

   (On pourra contrôler les calculs sur la figure $\mathscr{F}$.)

2. Vérifier que :
   a) Pour tout $(M,\ N)$ de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}$:
   $$(\Delta(M,\ N) = 0) \Longleftrightarrow (M = N)\ ;$$
   b) Pour tout $(M,\ N)$ de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}$:
   $$\Delta(M,\ N) = \Delta(N,\ M)\ ;$$
   c) Pour tout $(M,\ N,\ P)$ de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}\times\mathscr{P}$:
   $$\Delta(M,\ P) \leqslant \Delta(M,\ N) + \Delta(M,\ P).$$

3. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont les éléments sont les réels de la forme $\Delta(M,\ N)$ où $M\in\mathscr{P}$, $N\in\mathscr{P}$, admet un plus petit majorant que l(on précisera.

C) Soit C le cercle de centre O et de rayon 1. Soit un réel $\alpha \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et soit S'_α la corde du cercle privée de ses extrémités et perpendiculaire à la droite $(O,\ \vec{u})$ au point d'abscisse $\cos\alpha$. On se propose d'étudier la partie $\mathscr{S}_\alpha$ de $\mathscr{P}$ formée des points dont l'image par Φ appartient à S'_α.



1. M' étant l'image de M par Φ, calculer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M. Former la relation (E) à vérifier par les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M pour que son image M' appartienne à S'_α.
2. Déterminer $\mathscr{S}_\alpha$ et tous ses éléments géométriques. Le candidat au le choix entre les deux méthodes suivantes :
   a) Traduire la relation (C1) en termes de distances. (En particulier on pourra considérer la distance de M à un droite convenable).
   b) $\mathscr{S}_\alpha$ est une partie d'une conique dont on formera une équation cartésienne que l'on réduira.
3. Construire $\mathscr{S}_{\frac{\pi}{3}}$ et placer ses éléments caractéristiques.

Retour page 1

XII. Poitiers, série C

✻ Ex. 390. ./1979/poitiersC/exo-1/texte.tex

Soit φ l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = x + y - \dfrac{1}{a} \\ y' = -x + y - \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Préciser la nature de φ et ses éléments caractéristiques.

XIII. Portugal Beyrouth, série C

✻ Ex. 391. ./1979/portugalC/exo-1/texte.tex

On donne la suite (q_n), $n \in \mathbb{N}$ d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.
On construit la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{q_0} \\ u_1 &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

1° Montrer que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant pas exemple que de q_0).
En déduire que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, a un limite, qui appartient à l'intervalle $]0\,;1]$ de $\mathbb{R}$.

2° Montrer que si, pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier k, $q_n = q_k$, la limite de la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, est un rationnel.

✻ Ex. 392. ./1979/portugalC/exo-2/texte.tex

1° Dans le plan affine affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe C définie par : $2ay = x^2$, a réel positif donné.

2° Calculer la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe C au point M_1 d'abscisse x_1. Quelle relation doivent vérifier x_1 et x_2 de deux points M_1 et M_2 de C pour que les tangentes à C en ces points soient orthogonales ?

3° Démontrer que la droite M_1M_2 déterminée par deux points de C ainsi associés passe par un point fixe qu'on placera sur la figure.
Déterminer l'ensemble décrit par l'intersection des tangentes à C en M_1 et M_2.

✩Problème 111

./1979/portugalC/pb/texte

A) $\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes, on pose

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

On vérifiera que $1 + j + j^2 = 0$.
Soit F l'application polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$z \longmapsto F(z) = z(z+1)(z-j^2) + \frac{2}{9}(j-4).$$

1. Déterminer les coefficients complexes a et b de façon que l'application σ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$z \longmapsto \sigma(z) = az + b$$

vérifie les deux conditions :

$$\sigma(j^2) = 0, \qquad \sigma(0) = -1.$$

Comparer alors $\sigma(-1)$ et j^2.

2. On considère l'application s de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dépendant du paramètre complexe m :

$$z \longmapsto s(z) = mz - 1.$$

Peut-on déterminer m de façon que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) F[s(z)] = F(z) \,?$$

(On admet que deux applications polynômes sont égales si, et seulement si, les polynômes ordonnés ont les mêmes coefficients.)

Comparer au résultat du A1

3. Soit r l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \longmapsto jz - 1$.

Déterminer l'unique complexe z_0 invariant par r. Vérifier que $z_0^2 = -\frac{1}{3}j^2$.

Calculer $r \circ r \circ r$. Vérifier que, pour tout z dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure d'espace affine réel, z_0 est l'isobarycentre du triplet $(z,\ r(z),\ r^2(z))$.

4. Pour λ complexe, développer et ordonner $F(z_0 + \lambda)$. En déduire que l'équation $F(z) = 0$ admet trois racines complexes, préciser celles-ci et le situer sur une figure du plan complexe.

B) Soit E un plan vectoriel réel (espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$). Un endomorphisme f de E est dit ternaire si $f \circ f \circ f = \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$, application identique de E. (Dans la suite on notera $f \circ f \circ f = f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$,etc.)

1. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme ternaire de E, et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E tel que le système $(\vec{u},\ f(\vec{u}))$ soit lié. Montrer que $f(\vec{u}) = \vec{u}$. En déduire qu'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & k \end{pmatrix}$, h, k étant deux réels.

Démontrer que f est nécessairement l'application identique. (On calculera A^3.)

2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E et que pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de E, le système $(\vec{u},\ f(\vec{u}))$ soit libre. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E, et $\vec{v} = f(\vec{u})$; alors il existe deux réels p, q tel que la matrice de f dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$ soit $B = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$.

Calculer p et q de façon que f soit ternaire.

p et q ayant les valeurs trouvées, et Π désignant un plan affine attaché à E, démontrer analytiquement ou par tout autre procédé, que l'application affine g de Π dans Π admettant f comme endomorphisme associé admet un point invariant unique et vérifie $g \circ gg = \mathrm{Id}_{\Pi}$

3. Plus généralement, soit F l'endomorphisme de E dont la matrice, dans une base $(\vec{u},\ \vec{v})$ de E, est $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est un réel donné de l'intervalle $]0\,;\pi[$.

On définit sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par

$$\Phi(\vec{u},\ \vec{u}) = 1, \qquad \Phi(\vec{v},\ \vec{v}) = 1, \qquad \Phi(\vec{u},\ \vec{v}) = \cos\theta.$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur E, et que F est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(\mathrm{E},\ \Phi)$.

E étant supposé orienté par la base $(\vec{u},\ \vec{v})$, déterminer le vecteur $\vec{w}$ de E de façon que $(\vec{u},\ \vec{w})$ soit une base directe et orthonormée relativement à Φ. Former la matrice de F dans cette nouvelle base.

Quelle est la nature de F dans $(\mathrm{E},\ \Phi)$? Á quelle condition, n étant un entier donné supérieur ou égal à 3, a-t-on $F^n = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$?

XIV. Rennes, série C

Ex. 393. ./1979/rennesC/exo-1/texte.tex

Soit K l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.
On note E l'ensemble des entiers naturels s'écrivant en base dix $\overline{ababab}$ où $(a,\ b)$ est un couple *quelconque* de K^2.

1° Quel est le nombre d'éléments de E ?

2° Si $n = \overline{ababab}$, démontrer que $\overline{ab}$ divise n.

3° Quel est le plus grand diviseur commun à tous les éléments de E ?
Quelle est la somme des éléments de E ?

Ex. 394. ./1979/rennesC/exo-2/texte.tex

On considère dans un plan affine euclidien orienté un triangle isocèle ABc rectangle en A tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ soit $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1° Déterminer $\mathrm{F}_1 = \mathrm{R} \circ \mathrm{T}$ et $\mathrm{F}_2 = \mathrm{T} \circ \mathrm{R}$ (nature et éléments caractéristiques).

2° Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 son image par F_2. Quelle set la nature du quadrilatère $\mathrm{BC}M_1M_2$?

XV. Baccalauréat Algérien, séries Mathématiques et Technique.

Ex. 395. ./1979/algeriemath/exo-1/texte.tex

1° Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(z-p)^2 = p^2 - 1,$$

où z est l'inconnue et p un paramètre réel ; on appelle S_P l'ensemble des solutions de cette équation.
Exprimer, suivant les valeurs de p, les éléments de S_p.

2° p est un paramètre complexe et φ un paramètre réel satisfaisant à $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; l'équation d'inconnue z

$$(z-p)^2 = \cos 2\varphi + \mathrm{i} \sin 2\varphi \ ;$$

i est le nombre complexe défini par $\mathrm{i}^2 = -1$; on appelle z_1 et z_2 les solutions complexes de cette équation.

a) Calculer z_1 et z_2.

b) On considère les points M du plan dont l'affixe est $(z_1 - z_2)$ ou $(z_2 - z_1)$; quel est l'ensemble des points M quand φ varie ?

c) On suppose que p est un complexe non nul et d'argument θ constant ; quel est l'ensemble des points N d'affixe $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$?

Ex. 396. ./1979/algeriemath/exo-2/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation

$$90(x-3) = 36(2-y).$$

En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et satisfaisant à

$$90(x-3) = 36(2-y) \quad \text{et} \quad xy \geqslant -15.$$

XVI. Baccalauréat Marocain, série Mathématiques et Technique

✻ Ex. 397. ./1979/marocmath/exo-1/texte.tex

On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}^\star \\ (n,\ p) &\longmapsto (2p+1)2^n \end{aligned}.$$

1° Démontrer que f est injective. (On utilisera le théorème de Gauss.)

2° Démontrer que f est surjective. (On peut utiliser la décomposition des entiers naturels non nuls en produit de facteurs premiers.)

3° En déduire que les ensembles $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont équipotants.

XVII. Vietnam, série C

✻ Ex. 398. ./1979/vietnamC/exo-1/texte.tex

1° a) p étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on définit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, par : $V_n = \dfrac{p^n}{n+1}$.

Démontrer que cette suite est strictement croissante.

En déduire que

$$(\forall p \geqslant 2),\quad (\forall n \geqslant 1),\qquad \frac{p^n}{n+1} \geqslant 1$$

et

$$(\forall p \geqslant 5),\quad (\forall n \geqslant 1),\qquad \frac{p^n}{n+1} > 2.$$

b) Trouver, à l'aide du résultat précédent, tous les couples $(p,\ n)$ où p est un entier naturel *premier*, et n un entier strictement positif, qui vérifient

$$1 \leqslant \frac{p^n}{n+1} \leqslant 2.$$

2° Soit a un entier naturel non nul, qui s'écrit $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots.p_k^{\alpha_k}$ où $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$ sont des entiers naturels premiers, deux à deux distincts, et $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ des entiers naturels non nuls.

On admettra que le nombre de diviseurs de a dans $\mathbb{N}$ est

$$d(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

En utilisant 1b), déterminer les entiers naturels non nuls a tels que $a = 2d(a)$.

✻ Ex. 399. ./1979/vietnamC/exo-2/texte.tex

Soit ABC un triangle, non équilatéral, d'un plan affine euclidien P et soit $a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Soit G le centre de gravité du triangle.

1° Démontrer que

$$GA^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}.$$

2° Déduire du 1 la valeur de

$$(b^2-c^2)GA^2 + (c^2-a^2)GB^2 + (a^2-b^2)GC^2.$$

3° Déterminer l'ensemble D des points M du plan P tels que

$$(b^2-c^2)MA^2 + (c^2-a^2)MB^2 + (a^2-b^2)MC^2 = 0.$$

(On mettra en évidence deux points de D.)

Chapitre 20

1980

Sommaire

I. Aix Marseille, série C

Ex. 400. *4 points.* *./1980/aixC/exo-1/texte.tex*

E désigne un espace affine euclidien de dimension trois. La distance entre deux points quelconques M et N de E est notée MN.

1° Soit trois points A, B et C non alignés et le point I défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

De quels coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre ?

2° On suppose désormais que le triangle ABC est rectangle en A et $AB = 2$ et $AC = 1$.

On pose $S = \left\{M \mid M \in \text{E}, \quad MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\right\}$.

Démontrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Ex. 401. *4 points.* *./1980/aixC/exo-2/texte.tex*

Deux amis A et B organisent un jeu comprenant cinq parties. Ils décident de disputer une partie par jour, durant cinq jours.

Á chaque partie, il y a un gagnant et un perdant. Chaque jour, la probabilité que A gagne est 0,6. Celui qui remporte le plus grand nombre de partie est déclaré vainqueur.

1° Définir un espace probabilisé fini (Ω_0, B_0, P_0) associé à chacune des parties.

2° Associer au jeu un nouvel espace probabilisé fini (Ω, B, P) et introduire une variable aléatoire réelle X dont l'image est égale au nombre de parties gagnés par A au cours du jeu.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Quelle est la probabilité que A ne soit pas vainqueur à ce jeu ?

✰Problème 112 *12 points.*

./1980/aixC/pb/texte

Partie I.

λ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(x) = -x^2 e^{-x}.$$

1° Étudier λ. On admettra que $\dfrac{e^x}{x^2}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

2° Construire la courbe Γ représentative de λ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3° L'étude des variations de λ fait apparaître trois intervalles sur lesquels le fonction est monotone ; soient D_1, D_2 et D_3 ces intervalles avec $\forall (x_1, x_2, x_3) \in D_1 \times D_2 \times D_3$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.

En notant D_1', D_2' et D_3' les images par λ de D_1, D_2 et D_3, démontrer que les trois applications λ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$
$\begin{aligned} \lambda_i : D_i &\longrightarrow D_i' \\ x &\longmapsto \lambda(x) \end{aligned}$ sont des bijections.

Étudier les réciproques $\mu_i = \lambda_i^{-1}$.

Partie II.

α étant un nombre réel, on définit une application f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^2 + \alpha e^x$.
On note $\mathscr{C}_\alpha$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° Démontrer que pour tout point M du plan, de coordonnées a et b, il passe une et seulement une, courbe $\mathscr{C}\alpha$.

2° Démontrer que ceux des nombres $\mu_1(\alpha)$, $\mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ qui existent pour une valeur donné de α, sont les abscisses des points communs à $\mathscr{C}_\alpha$ et à la droite définie par O et $\vec{\imath}$.

3° Soit J l'intervalle $\left[-4e^{-2}\,;0\right[$.

a) Montrer que $\mu_1(\alpha)$, $\mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ existent simultanément si, et seulement si, α appartient à J.

b) Étudier les variations de f_α pour une valeur quelconque de α appartenant à J.
(Pour étudier le signe de la fonction dérivée f_α' on sera amené à étudier celui de f_α''). Dessiner une ébauche de $\mathscr{C}_\alpha$.

4° On pose :

$$\forall \alpha \in J, \qquad I(\alpha) = \int_{\mu_1(\alpha)}^{\mu_3(\alpha)} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha'(x) - f_\alpha(x) = 2x - x^2$.

b) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad I(\alpha) = \left[\frac{1}{3}\mu_3^3(\alpha) - \mu_3^2(\alpha)\right] - \left[\frac{1}{3}\mu_1^3(\alpha) - \mu_1^2(\alpha)\right]$.

c) En déduire que $\forall x \in J, \quad I(\alpha) > \frac{1}{3}\mu_3^3(\alpha) - \mu_3^2(\alpha)$.
Quel est le signe de $I(\alpha)$ si α est tel que $\mu_3(\alpha) = 3$?

d) Donner une interprétation géométrique de $I(\alpha)$. Quel est le signe de $I(-4e^{-2})$?

e) En utilisant cette interprétation, établir que I est une application strictement croissante.

f) Combien d'éléments contient l'ensemble $\{\alpha \mid \alpha \in J, \quad I(\alpha) = 0\}$?

II. Besançon, série C

✲ Ex. 402.

./1980/besançonC/exo-1/texte.tex

Si a et b sont deux entiers, le plus grand diviseur commun de a et de b est noté $\Delta(a, b)$.
Soit (U) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1° Calculer les termes u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 de la suite U.

2° Montrer que le suite U vérifie :
pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
En déduire le plus grand diviseur commun de deux termes consécutifs de cette suite U.

3° a) Montrer que la suite U vérifie :
pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.
Les nombres $2^n - 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

b) Vérifier que, pour tout couple d'entiers naturels (n, p)

$$u_{n+p} = u_n(u_p + 1) + u_p.$$

En déduire que, pour tout couple d'entiers naturels $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\Delta(u_n, u_p) = \Delta(u_n, u_{n+p}). \tag{1}$$

c) Soit a et b deux entiers naturels non nuls, r est le reste de la division euclidienne de a par b, déduire de la propriété (1) que

$$\Delta(u_b, u_r) = \Delta(u_a, u_b)$$

et que

$$\Delta(u_a, u_b) = u_{\Delta(a, b)}.$$

(on pourra utiliser l'algorithme d'Euclide, méthode des divisions successives).

d) Calculer alors $\Delta(u_{1982}, u_{312})$.

Ex. 403. ./1980/besançonC/exo-2/texte.tex

On considère dans le plan vectoriel V rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'endomorphisme $g_{\alpha, \beta}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ associe le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées xyp dans la même base définies par

$$\begin{cases} x' = \alpha x - 2\alpha y \\ y' = 2\beta x + \beta y \end{cases}$$

α et β étant deux réels.

1° Déterminer les réels α et β pour que $g_{\alpha, \beta}$ soit une projection vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

2° Déterminer les réels α et β pour que $g_{\alpha, \beta}$ soit une involution que l'on précisera.

☆Problème 113

./1980/besançonC/pb/texte

On se propose d'étudier des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes) définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \quad (c, d) \neq (0, 0).$$

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on désigne par M et M' les points d'affixes z et $f(z)$ et par F la fonction de P dans P qui au point M associe le point M'.
F sera appelée fonction ponctuelle associée à f.

I. Montrer que f est constante si et seulement si $ad - bc = 0$.

1. On pose $a = 1$, $c = 0$, $d = 1$ et on note f_1 l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.
   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de F_1.
   b) Déterminer l'image par F_1 :
      – d'une droite D quelconque de P
      – d'un cercle $\mathscr{C}$ quelconque de P.
2. On pose $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $a \neq 0$ et on note f_2 l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.
   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de F_2.

b) Déterminer l'image par F_2 :

– d'une droite D quelconque de P

– d'un cercle $\mathscr{C}$ quelconque de P.

3. On pose $a = d = 0$, $b = c = 1$ et on note f_3 l'application de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.

a) Montrer que F_3 est une involution de $\text{P}_{\{O\}}$ dans $\text{P}_{\{O\}}$.
Quels sont les points invariants de F_3 ?

b) Soit Σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(O, \vec{i})$ et $K = \Sigma \circ F_3$.
Déterminer l'affixe z'' de $K(M)$ en fonction de l'affixe z de M. (On suppose $\neq 0$).
En déduire que les points M et M'' appartiennent à une même demi-droite d'origine O et que $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OM''}\right\| = 1$.

c) Déterminer l'image par F_3 :

– d'une droite passant par O, privée de ce point

– d'un cercle de centre O

– de la droite d'équation $x = 1$.

4. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{\text{i}}{z-1}$.

a) Soit A le point d'affixe 1. Montrer que F est une bijection de $\text{P}-\{A\}$ sur $\text{P}-\{O\}$.

b) Montrer qu'il existe des valeurs de a et b telles que F soit la composée de fonctions ponctuelles définies au 1, 2 et 3.

c) En déduire l'image par F :

– de la droite d'équation $x = 1$, privée de A

– du cercle de centre A et rayon 1

– de la droite d'équation $x = 2$.

II. On considère l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions f définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \text{tel que } ad - bc \neq 0.$$

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est aussi l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \text{tel que } |ad - bc| = 1.$$

(On montrera que si $k \in \mathbb{R}^\star$, (a, b, c, b) et (ka, kb, kc, kd) définissent la même fonction f).

b) On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $|ad - bc| = 1$.

Montrer que $(\mathscr{A}, \times)$ est un groupe et que $u : \begin{array}{rcl} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{F} \\ m & \longmapsto & f \end{array}$ si $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $u(m) = f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathscr{A}, \times)$ dans $(\mathscr{F}, \circ)$.
Définir alors la structure de $(\mathscr{F}, \circ)$.

c) Déterminer tous les éléments de $\mathscr{F}$ tels que

$$a = 4, \quad b = 3, \quad (c, d) \in \mathbb{Z}^2.$$

Les questions I et II sont indépendantes.

III. Besançon-Polynésie, série C

✻ Ex. 404. 4 points. ./1980/bes-polynesieC/exo-2/texte.tex

1° a) Chercher le polynôme $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ de degré 2 tel que pour tout élément x de $\mathbb{N}$ l'égalité suivante soit vraie

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=[P(x)]^2.$$

b) En déduire pour $x>3$ l'écriture en base x du nombre entier naturel dont le carré est

$$A=\overline{10}_x\times\overline{11}_x\times\overline{12}_x\times\overline{13}_x+\overline{1}_x.$$

2° Écrire en base x (où $x>3$), la carré de $\overline{11}_x$, le cube de $\overline{11}_x$

3° Quels sont les diviseurs du nombre $B=\overline{1320}_x$ dans quelle base x où $x>3$.

4° Vérifier que pour $x=3$ le nombre $\overline{111}_x$ est divisible par 13. En déduire quelles sont toutes les bases $x\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ pour lesquelles $\overline{111}_x$ est divisible par 13.

IV. Cameroun, série C

✻ Ex. 405. ./1980/camerounC/exo-1/texte.tex

On désigne par **P** l'ensemble des entiers naturels *premiers*. On se propose de résoudre dans **P** × **P** l'équation :

$$x^2-y^2=pq \tag{1}$$

où p et q sont deux entiers naturels *premiers*.

1° Étudier le cas $p=q=2$.

2° On suppose $q=2$ et $p>2$.
Démontrer que x et y sont nécessairement tous les deux impairs. En posant $x=2x'+1$ et $y=2y'+1$, en déduire que l'équation (1) n'a pas de solution.

3° On suppose $2<q\leqslant p$.

a) Démontrer que y est nécessairement égal à 2.

b) Démontrer que, si $p-q\neq 4$, l'équation (1) n'a pas de solution.

c) On se place dans le cas où $p-q=4$.
Démontrer que $(q,\ x,\ p)$ forme une suite arithmétique de raison 2.
En déduire que l'équation (1) n'a de solution que si $q=3$ et $p=7$.
(Indication : on démontrera que, quel que soit n entier naturel, l'un des trois nombres $n,\ n+2,\ n+4$ est divisible par 3).
Quelle est la solution dans ce cas ?

V. Dijon, série C

✻ Ex. 406. ./1980/dijonC/exo-1/texte.tex

E désigne un espace affine associé à un espace vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension 3, rapporté au repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Soit f l'application affine de E dans E, qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe la point M' dont les coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ sont :

$$\begin{cases}x'=-x+z\\ y'=-2x+y+z+2\\ z'=z+4.\end{cases}$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est involutif ; le déterminer.

2. Quel est l'ensemble des points invariants par f ?
3. Soit g la symétrie affine d'endomorphisme associé à φ qui laisse invariant le point A ed coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$. Soit t la translation de vecteur $2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Démontrer que $f = t \circ g = g \circ t$.

VI. Grenoble remplacement, série C

Ex. 407. *3,5 points.* *./1980/grenobleCrem/exo-2/texte.tex*

Soit n un entier relatif. On pose $A = n^3 + 3n^2 + 2n - 4$, $B = n^2 + 2n - 1$ et $C = n - 3$.

1. Montrer qu'il existe un entier relatif q que l'on déterminera tel que :

$$A = Bq + C.$$

En déduire que le pgcd de A et B est égal au pgcd de B et C.

2. Montrer que le pgcd de A et B est égal au pgcd de C et de 14. En déduire les valeurs possibles du pgcd de A et B.
   - Pour quelles valeurs de n, le pgcd de A et B est-il égal à 7 ?
   - Pour quelles valeurs de n, A et B sont-ils premiers entre-eux ?

VII. Limoges, série C

Ex. 408. *./1980/limogesC/exo-1/texte.tex*

Soit $\mathscr{E}_3$ un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère l'application affine f qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ données par :

$$\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x - 2 \\ z' = -z \end{cases}$$

Montrer que f est un vissage dont on déterminera l'axe et le vecteur de la translation.

VIII. Nantes, série C

Ex. 409. *3 points.* *./1980/nantesC/exo-1/texte.tex*

Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{Z}^\star$ le plus grand commun diviseur de ces deux nombres sera noté $p \wedge q$.

1° a) Déterminer l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ qui vérifient :

$$3x \equiv 23\ [7].$$

b) En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$ qui vérifient :

$$3x - 7y = 23 \qquad (1)$$

2° a) Soit k un élément de $\mathbb{Z}$, $k \neq -7$. Démontrer l'égalité

$$(3 + 7k)\ \wedge\ (-2 + 3k) = (k + 7)\ \wedge\ 23.$$

b) En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de $(\mathbb{Z}^\star)^2$ vérifiant (1) et tels que

$$x\ \wedge\ y \neq 1.$$

✲ Ex. 410. 5 points. ./1980/nantesC/exo-2/texte.tex

1° Soit g l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2 - x + \ln|x|$.

a) Etudier les variations de g et ses limites aux bornes de $\mathbb{R}^\star$.

b) Démontrer qu'il existe 3 nombres réels α_1, α_2, α_3, qu'on ne cherchera pas à calculer, tels que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < 1 < \alpha_3 \\ g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = g(\alpha_3) = 0 \end{aligned}$$

2° Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x(1 + \ln|x|)}{1 - x}.$$

Calculer la fonction dérivée f'. Déduire de la première question l'étude du signe de $f'(x)$.

3° Soit F l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}.$$

a) F est-elle continue en $x = 0$? Est-elle dérivable en ce point ?

b) Etudier les variations de F

c) On considère un plan affine rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ($\vec{\imath}$ dirigeant l'axe des abscisses, unité 3 centimètres). Donner l'allure de la courbe représentative C de F dans ce plan. Déterminer les points d'intersection, autres que O, de C avec la droite d'équation $y = -x$.

✩Problème 114 12 points. ./1980/nantesC/pb/texte

Soient P un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormée B= $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, $\mathscr{P}$ un plan affine associé à P, O un point de $\mathscr{P}$; on note $\mathscr{R}$ le repère (0 ; B) de $\mathscr{P}$.
Pour les représentations graphiques dans $\mathscr{P}$ on prendra deux centimètres pour unité de longueur.
On désigne par $\mathscr{L}(\mathrm{P})$ l'ensemble des endomorphismes de P. On rappelle que $\mathscr{L}(\mathrm{P})$ a une structure d'espace vectoriel et que, muni de l'addition et de la composition des applications, notées respectivement + et $\circ$, cet ensemble a aussi une structure d'anneau unitaire.
On désigne respectivement par e et ω l'application identique et l'application nulle de $\mathscr{L}(\mathrm{P})$.
Si f est un élément de $\mathscr{L}(\mathrm{P})$ et si n est un entier naturel, on note f^n l'élément de $\mathscr{L}(\mathrm{P})$ défini par les relations

$$f^0 = \mathrm{e},\ f^1 = f,\ f^n = f \circ f^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1.$$

I. On se propose d'étudier les endomorphismes f de $\mathscr{L}(\mathrm{P})$ vérifiant la relation

$$f^2 + \frac{1}{2}f - \frac{5}{18}\mathrm{e} = \omega. \tag{1}$$

1. Soit g l'endomorphisme de P dont la matrice dans la base B est :

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{7}{12} \\ -\dfrac{7}{12} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Vérifier que g est solution de (1).

2. a) Déterminer les deux homothéties vectorielles solutions de (1). On appelle k_1 et k_2 leurs deux rapports avec $k_1 < k_2$.

b) Démontrer que la relation (1) est équivalente à la relation

$$(f - k_1\mathrm{e}) \circ (f - k_2\mathrm{e}) = \omega. \tag{20.1}$$

3. Soit f l'endomorphisme de P, autre qu'une homothétie vectorielle, vérifiant (1). On note de la manière suivante deux noyaux et deux images :

$$N_1 = \ker(f - k_1\mathrm{e}),\ N_2 = \ker(f - k_2\mathrm{e}),\ I_1 = \mathbf{Im}(f - k_1\mathrm{e}),\ I_2 = \mathbf{Im}(f - k_2\mathrm{e}).$$

Retour page 1

a) Démontrer que $I_2 = N_1$ et $I_1 = N_2$. En déduire que N_1 et N_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de P.

b) Soient p_1 la projection vectorielle de P sur N_1 de direction N_2 et $p_2 = e - p_1$.
Démontrer le relation :
$$f = k_1 p_1 + k_2 p_2.$$
en déduire, pour n entier naturel, une expression de f^n combinaison linéaire de p_1 et p_2.

4. On désigne par π le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{P})$ engendré par p_1 et p_2 de la question précédente.

a) Quelle est la dimension de π ?

b) Démontrer que $(\pi, +, \circ)$ est un anneau unitaire. Préciser l'élément neutre de cet anneau.

c) Déterminer les solutions de (1) dans π, autres que f.

5. On suppose désormais que f est l'endomorphisme g définie à la première question.

a) Déterminer N_1 et N_2. Donner une base de chacun de ces espaces vectoriels.

b) Vérifier que p_1 et p_2 sont des projections orthogonales. En déduire que :
$$\forall x,\ x \in \mathrm{P},\quad \|x\|^2 = \|p_1(x)\|^2 + \|p_2(x)\|^2.$$

c) Démontrer qu'un élément $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ de π est une isométrie si et seulement si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. En déduire que l'ensemble des applications de π qui sont des isométries est un groupe dont on précisera les éléments.

II. Soit γ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dont l'endomorphisme associé est l'application g du I1 et telle que $\gamma(O) = O_1$, O_1 étant le point d'abscisse $\frac{7}{3}$ et d'ordonnée 5 dans $\mathscr{R}$.

1. Démontrer que γ admet un point invariant unique A dont on donnera les coordonnées dans $\mathscr{R}$.

2. *i.* Démontrer qu'il y a exactement deux droites de $\mathscr{P}$ passant par A, globalement invariantes par γ. Représenter graphiquement ces droites dans $\mathscr{P}$ muni de $\mathscr{R}$.

ii. Démontrer que ce sont les seules droites de $\mathscr{P}$ globalement invariantes par γ.

3. Soit $\mathscr{R}'$ le repère $(\mathrm{A}\ ;\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ dirige l'axe des abscisses et $\vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$ celui des ordonnées. Soit M_0 un point de $\mathscr{P}$. Si n est un entier naturel non nul, on pose $M_1 = \gamma(M_0)$, …, $M_n = \gamma(M_{n-1})$.

a) Montrer que l'on peut écrire
$$\overrightarrow{AM_n} = k_1^n p_1(\overrightarrow{AM_0}) + k_2^n p_2(\overrightarrow{AM_0}).$$
En déduire que
$$\left\|\overrightarrow{AM_n}\right\| \leqslant \left(|k_1|^n + |k_2|^n\right)\left\|\overrightarrow{AM_0}\right\|.$$
Que peut-on en déduire pour la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Déterminer le réel strictement positif α tel que la courbe C du plan $\mathscr{P}$, représentant dans $\mathscr{R}'$ la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^\alpha \end{cases}$ soit globalement invariante par γ.

c) Démontrer que si $M_0 \in \mathrm{C}$, on a :
$$\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ M_n \in \mathrm{C}.$$

4. Soit Γ le cercle de $\mathscr{P}$ de centre A et de rayon 4. Déterminer une équation de $\gamma(\Gamma)$ dans $\mathscr{R}'$. Quelle est la nature de cette courbe ? Préciser ses sommets. Représenter graphiquement Γ et $\gamma(\Gamma)$ sur le dessin de la question II(2)i.

IX. Nantes remplacement, série C

✻ Ex. 411. ./1980/nantesCrem/exo-2/texte.tex

On associe à tout nombre complexe son image dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé.

1° Déterminer les nombres complexes z tels que z^2, z^3, z^4 aient des images deux à deux distinctes.

2° Démontrer que si z, z^2, z^3, z^4 ont des images distinctes situées sur un cercle $\mathscr{C}$, z^2, z^3, z^4, z^5 ont des images situées sur un cercle $\mathscr{C}'$. Comparer les rayons de ces cercles.

3° En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que z, z^2, z^3, z^4 aient des images situées sur un cercle.

X. Nice, série C

✻ Ex. 412. ./1980/niceC/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien Σ, on considère trois points $A,\ B,\ C$ formant un triangle rectangle en B, isocèle, tel que $\mathrm{d}(A,\ B) = a$.

1° Déterminer et représenter l'ensemble E_1 des points M de Σ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

2° Déterminer et représenter l'ensemble E_2 des points M de Σ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

✻ Ex. 413. ./1980/niceC/exo-2/texte.tex

XI. Nice remplacement, série C

✻ Ex. 414. ./1980/niceCrem/exo-1/texte.tex

a) α étant un élement de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, discuter, suivant α le nombre de solutions de l'équation $X^2 = \alpha$, X étant élément de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation $x^4 + \dot{3}\ x^2 - \dot{5} = \dot{0}$.

✻ Ex. 415. ./1980/niceCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien Σ, on considère trois points A B C formant un triangle rectangle et isocèle en B, tel que $\mathrm{d}(A,\ B) = a$.

1. Déterminer et représenter l'ensemble E_1 des points M de Σ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

2. Déterminer et représenter l'ensemble E_2 des points M de Σ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

☆**Problème 115** *12 points.* ./1980/niceCrem/pb/texte

Les parties A, B, C peuvent être traitées indépendamment.
On désigne par F la fonction polynôme définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = x^2 - 3x + 2.$$

A- On se propose de montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n et une fonction polynôme g_n à coefficients réels, tels que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = g_n(x).F(x) + a_n x + b_n.$$

1. Déterminer $g_0, a_0, b_0, g_1, a_1, b_1$ et g_2, a_2, b_2.
2. Démontrer par récurrence l'existence de g_n, a_n, b_n pour tout n. On établira notamment les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 3a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & -2a_n \end{array}$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.$$

4. Montrer que la suite de terme général $u_n = a_n + 1$ est une suite géométrique. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

B- Soit E un espace vectoriel de dimension 2, et soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E.
On considère l'endomorphisme T de E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère d'autres part les vecteurs

$$\vec{I} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$
$$\vec{J} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$$

1. Montrer que $(\vec{I}, \vec{J})$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice B de T dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.
3. On pose $\mathrm{T}^1=\mathrm{T}$, et on définit par récurrence $\mathrm{T}^n = \mathrm{T}^{n-1} \circ \mathrm{T}$ pour $n \geqslant 2$.
Calculer la matrice de T^n dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$, en déduire l'expression de la matrice T^n dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

C- On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = F(\mathrm{e}^x).$$

1. Faire une étude complète de la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé. On calculera notamment l'abscisse du point d'intersection de C avec son asymptote.
(On utilisera les valeurs approchées $\ln 2 \approx 0{,}69$, $\ln 3 \approx 1{,}10$).
2. On considère la restriction g de f à l'intervalle $\left[\ln\frac{3}{2}\,; +\infty\right[$.
Démontrer que g est une bijection de cet intervalle sur un intervalle U que l'on déterminera. Calculer le réel $g^{-1}(x)$ en fonction du réel x appartenant à U.
3. Soit D l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient :
$$f(x) \leqslant y \leqslant 0.$$
Calculer l'aire de D.
4. Á l'aide de la fonction f, déterminer la limite de la suite (S_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{n}\left(2^{\frac{2k}{n}} - 3.2^{\frac{k}{n}} + 2\right).$$

XII. La Réunion, série C

Ex. 416. ./1980/reunionC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $7x - 4y = 9$.
Quelles sont les valeurs possibles du P.G.C.D des couples (x, y) solutions de l'équation ?
Donner la forme générale des couples (x, y) solutions de l'équation, dont le P.G.C.D est maximum.

Ex. 417. ./1980/reunionC/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un plan muni d'un repère orthonormé.

1° Calculer $f(x) + f(-x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie.

2° Étudier les variations de f dans $\mathbb{R}^+$ et construire l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points de $\mathscr{C}$ dont les abscisses sont positives. On précisera la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à son asymptote.

3° Calculer l'aire de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ f(x) \leqslant y \leqslant x+1 \end{cases}$ où α est un réel positif donné, et la limite quand α tend vers l'infini.

✰Problème 116

./1980/reunionC/pb/texte

Soit d l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z = x + \mathrm{i}y \qquad d(z) = \inf\left[y - \mathrm{E}(y),\ \mathrm{E}(y+1) - y\right],$$

x et y réels.

1° Calculer $d(1)$, $d\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$, $d\left(1 + \frac{5\mathrm{i}}{4}\right)$.
Donner une interprétation géométrique de l'application d en utilisant le point M_0 d'affixe z_0 et les droites D_0 et D'_0 d'équations respectives $y = \mathrm{E}(y_0)$ et $y = \mathrm{E}(y_0 + 1)$.

2° *Les candidats pourront résoudre cette question, soit par le calcul, soi par une méthode géométrique, utilisant l'interprétation précédente et suivant les cas, une symétrie orthogonale ou une translation convenablement choisie.*
comparer, pour tout nombre complexe z, $d(-z)$ et $d(z)$;
pour tout nombre complexe z et pour nombre entier q, $d(z + \mathrm{i}q)$ et $d(z)$;
pour tout couple de réels x et y, $d(x + \mathrm{i}y')$ et $d(x + \mathrm{i}y)$ lorsque $y' = 2\mathrm{E}(y) + y + 1$.
Déterminer l'ensemble des valeurs $d(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{C}$.

3° Soit δ l'application de P dans $\mathbb{R}$ qui à chaque point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\delta(M) = d(z)$.
Définir et représenter graphiquement dans P l'ensemble des points M tels que $\delta(M) = 0$.
On définit de même une application c de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z = x + \mathrm{i}y \qquad c(z) = \inf\left[x - \mathrm{E}(x),\ \mathrm{E}(x+1) - x\right]$$

pour x et y réels, et l'application correspondante γ, de P dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\gamma(M) = c(z)$.
Définir et représenter graphiquement dans P l'ensemble des points M tels que :

$$\delta(M) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \gamma(z) = \frac{1}{2}.$$

4° Soit T l'application qui, à tout point M de P d'affixe z associe la point M' de P d'affixe z' telle que :

$$z' = x + \mathrm{i}d(z) \quad \text{avec } x \text{ partie réelle de } z.$$

Soit M_1 d'affixe 1, M_2 d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et M_3 le milieu du segment M_1M_2 ; déterminer leurs images par T.
T est-elle une application affine de P ?

5° On note $I_{a,\,b}$ l'ensemble des points M de P dont les affixes $z = x + \mathrm{i}y$ vérifient : $a \leqslant y < b$, a et b étant deux réels donnés.

a) Démontrer que la restriction de T à $I_{n,\,n+\frac{1}{2}}$ où $n \in \mathbb{Z}$ est une translation.

b) Démontrer que la restriction de T à $I_{n+\frac{1}{2},\,n+1}$ où $n \in \mathbb{Z}$ est une symétrie orthogonale.

6° On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{3}{2}$.

7° Étudier les variations de f est construire sa représentation graphique C dans le plan P. Montrer que C possède un centre de symétrie.

8° Construire la courbe C′, image de la courbe C par T.

9° Construire la représentation graphique Γ de la fonction g :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - d(x + \mathrm{i}y) \end{aligned}$$

où x et y sont les coordonnées d'un point M de C.

Retour page 1

XIII. Sénégal, série C

✻ Ex. 418. ./1980/senegalC/exo-1/texte.tex

1° Linéariser $\sin^3 x$.

2° En intégrant par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^3 x)\,\mathrm{d}x.$$

✻ Ex. 419. ./1980/senegalC/exo-2/texte.tex

Mamadou et Diallo font cinq parties de pile ou face avec une pièce parfaitement équilibrée ne pouvant retomber sur la tranche ; l'enjeu est de 100 F par parties. (Celui qui perd donne 100 F à celui qui gagne.)
Chacun d'eux dispose d'une somme de 400 F. le règlement s'effectue à la fin de la cinquième partie. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre k de parties gagnées par Mamadou.

1° A quelle double inégalité doit satisfaire k pour que le règlement puisse s'effectuer sans dette de l'un ou l'autre joueur (c'est à dire que chaque joueur peut donner immédiatement à l'autre joueur la somme qu'il lui doit) ?

2° a) Donner le loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Quelle est la probabilité d'un règlement sans dette ?

XIV. Togo, série C

✻ Ex. 420. ./1980/togoC/exo-1/texte.tex

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 0 \text{ pour } x \in]-\infty\,; -1]$$
$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ pour } x \in]-1\,; 1[$$
$$f(x) = x^2 + bx + c \text{ pour } x \in [1\,; +\infty[\,,\ b \text{ et } c \text{ étant deux réels.}$$

1° Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point -1.

2° Déterminer les réels b et c de manière que f soit continue au point 1.

3° Étudier les variations de f pour les valeurs de b et c obtenues ci-dessus, et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

✻ Ex. 421. ./1980/togoC/exo-2/texte.tex

Tous les entiers considérés sont écrits dans le système de numération décimale.

1° Quel est le chiffre des unités de l'entier 17^{1980} ?

2° Soit a_n le chiffre des unités de l'entier 17^n ($n \in \mathbb{N}$) ; quelles valeurs peut prendre l'entier a_n ?

3° Pour quelles valeurs de n a-t-on $a_n = 3$?

XV. Tunisie, série C

✩Problème 117 ./1980/tunisieC/pb/texte

I. Soit f une primitive, sur $\mathbb{R}$, de l'application φ qui, à tout réel t, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}.$$

1° Soit g l'application de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u) = f\left(\frac{1+\tan u}{2}\right)$. Prouver que g est différentiable sur S, puis que g est une fonction affine.

2° Montrer que $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t$.

II. On considère l'application I de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(p,\,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

1° En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t \in [0\,;1]$, trouver la limite de la suite u telle que $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$, $u_n = I(n,\,n)$.

2° Montrer que :

$$\forall (p,\,q) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star, \qquad I(p+1,\,q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties),

puis que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$, $\quad I(n,\,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

III. 1° Après avoir remarqué que $2t^2-2t+1 = 1-2t(1-t)$, simplifier $\frac{1}{2t^2-2t+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$.

2° On considère la suite v telle que $v_0 = 1$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star), \quad v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Quelle est la limite de la suite w telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \;?$$

Chapitre 21

1981.

Sommaire

I. Aix Marseille, série C

✻ Ex. 422. ./1981/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de $\mathbb{N}^\star$ (ensemble des entiers naturels non nuls.

1° Soit E l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n-1$, où n est élément de $\mathbb{N}^\star$.
Montrer que E a au moins deux éléments.

2° On *suppose* E *fini*. Soit P le produit de tous les éléments de E et $X = 4P-1$.

a) Trouver un minorant de X.

b) Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^\star$.

c) Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^\star$.

3° En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n-1$, la définition de P et la relation $X = 4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.

✻ Ex. 423. ./1981/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine P rapporté au repère cartésien $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, soit A et B les points de coordonnées respectives $(-1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 1)$, et soit t un nombre réel non nul.
On désigne par f, g, h les homothéties de rapport t et de centres respectifs O, A, B.
A tout point M du plan P, on fait correspondre successivement les points : $M_1 = f(M)$, $M_2 = g(M_1)$, $M_3 = h(M_2)$ et $M_4 = f(M_3)$.

1° Représenter sur un même figure les points M_1, M_2, M_3, M_4 dans le cas où $t = 2$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. (On pourra donner aux représentations de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ la longueur 0,5 cm).

2° Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM_4}$ en fonction de t et des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$.

3° Soit φ l'application du plan P dans lui-même définie par

$$\text{pour tout point } M \text{ de P, } \varphi_t(M) = f \circ h \circ g \circ f(M).$$

Déterminer suivant les valeurs de t l'ensemble des points de P invariants par φ_t et préciser dans chaque cas la nature de φ_t.

✫Problème 118

./1981/aixmarseilleC/pb/texte

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels privés des nombres 0 et 1.

A) On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_1 = 1$ et $v_1 = 1$ et, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$:

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

et

$$v_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}.$$

a) Trouver deux réels A et B tels que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}.$$

En déduire que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$,

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Montrer que la suite u est croissante, que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$: $u_n \leqslant v_n$, que la suite u est majorée.

B) On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un élément de $\mathbb{N}$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

1° Soit t un élément de $[0\,;\pi]$; on pose pour n, élément de $\mathbb{N}'$

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt \qquad \text{et} \qquad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt.$$

a) Calculer le nombre complexe $C_n(t) + \mathrm{i}S_n(t)$.
En déduire que si t est un élément de $]0\,;\pi]$

$$C_n(t) = \frac{\sin\frac{nt}{2}.\cos\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

et si $t = 0$, $C_n(0) = n$.

b) L'application C_n de $[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle continue sur $[0\,;\pi]$.

2° Vérifier que pour tout t, élément de $]0\,;\pi]$:

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

et montrer que l'application de $]0\,;\pi]$ qui à t associe $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction g_n continue sur $[0\,;\pi]$.

3° Montrer que pour tout n, élément de $\mathbb{N}^\star$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

en déduire que

$$u_n=\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\,C_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

4° Vérifier que

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}$$

et que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}^\star$:

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\,g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

C) On considère la fonction numérique f définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(0)=2$ et pour tout t, élément de $]0\,;\pi]$

$$f(t)=\frac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

1° Montrer que f est continue sur $[0\,;\pi]$; en déduire l'existence d'un réel M tel que, pour tout t, élément de $[0\,;\pi]$:

$$0\leqslant f(t)\leqslant M.$$

2° Soit α un réel fixé tel que $0<\alpha<\pi$.

a) Montrer que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^\alpha f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \alpha M.$$

b) Montrer que f est dérivable sur $[\alpha\,;\pi]$ et que la fonction dérivée f' est continue sur ce segment. En déduire l'existence d'un réel M' tel que, pour tout t, élément de $[\alpha\,;\pi]$

$$\left|f'(t)\right|\leqslant M'.$$

c) On pose, pour tout n, élément de $\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_\alpha^\pi f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t.$$

Montrer en utilisant une intégration par parties, que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=0.$$

3° Déduire de la question C2 que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{\pi^2}{6}.$$

II. Amiens, série C

✻ Ex. 424. 4 points. ./1981/amiensC/exo-1/texte.tex

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   a) Montrer que 1981 et 1815 sont premiers entre eux.
   b) Déterminer deux entiers relatifs a et b tels que $1981a + 1815b = 1$.
2. En déduire que dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$ $\overline{1815}$ admet un inverse que l'on déterminera.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{1815}x + \overline{1515} = \overline{732}$.

✻ Ex. 425. 4 points. ./1981/amiensC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormé direct. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M de coordonnées (x ; y)dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, associe la point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

1.- a) Montrer que f est bijective et déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que O, M, M' soient alignés.

2.- On désigne par M_1 et M_2 les projections orthogonales du point M respectivement sur les droites $(O,\ \vec{\imath})$ et $(O,\ \vec{\jmath})$. Montrer que M' est le transformé de M_1 dans une rotation de centre M_2 dont on déterminera une mesure de l'angle.

☆**Problème 119** *12 points.* ./1981/amiensC/pb/texte

-A) Pour tout entier naturel n, non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

-B) Soit g la fonction, définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log x}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est intégrable sur $[0\,;1]$.
2. Soit x un réel quelconque.
   a) Calculer pour tout n de $\mathbb{N}$ la somme
   $$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n \times x^{2n+1}.$$
   b) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\qquad \frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n \times x^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{1+x^2}.$$
   c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = U_1 - U_3 + \cdots + (-1)^n U_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{f_{2n+3}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

-C)

III. Amiens remplacement, série C

Ex. 426. ./1981/amiensCrem/exo-1/texte.tex

Soit f l'application de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} x \longmapsto x^2 \ln x \text{ pour } x > 0 \\ 0 \longmapsto 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. f est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudier f et tracer sa représentation graphique (C) dans le plan muni du repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 6 cm).
3. On désigne par α un nombre réel strictement positif ; calculer l'intégrale définie par :

$$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire l'aire en cm^2, du domaine (D) du plan défini par :

$$(D) = \{M(x\,;\,y),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

IV. Besançon, série C

Ex. 427. ./1981/besançonC/exo-1/texte.tex

On désigne par S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$138x - 55y = 5. \qquad (21.1)$$

1° Montrer que si $(x_0,\ y_0)$ est élément de S, alors $x_0 \equiv 0\ [5]$.

2° Résoudre l'équation (21.1).

3° $(x_0,\ y_0)$ étant un élément de S, quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun des deux termes du couple ?
Déterminer l'ensemble des éléments de S dont les termes sont premiers entre eux.

Ex. 428. ./1981/besançonC/exo-2/texte.tex

Le symbole ln désigne le logarithme népérien. (Les candidats peuvent toutefois, s'ils le désirent le remplacer par log).
Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \ln \frac{\mathrm{e}^{2x} + 5}{\mathrm{e}^{x} - 2}$$

sur l'ensemble E des points de $\mathbb{R}$ pour lesquels cette expression a un sens.
$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f, construite relativement à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° a) Quel est l'ensemble E de définition de la fonction f ?

b) Étudier le sens des variations de f, ainsi que ses limites éventuelles aux bornes de l'ensemble E.

c) On pose pour tout x appartenant à E :

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Étudier la limite éventuelle de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que le signe de $\varphi(x)$.
Que peut-on en conclure pour $(\mathscr{C})$?

d) Tracer $(\mathscr{C})$.

2° Soit A l'image de $]\ln 2\,;\ln 5[$ par f, et F l'application de $]\ln 2\,;\ln 5[$ sur A, définie pour tout x appartenant à $]\ln 2\,;\ln 5[$ par $F(x) = f(x)$.
Montrer que F admet une application réciproque G dont on précisera les propriétés : sens des variations, continuité, dérivabilité.
Tracer sur la même figure que $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de G.

V. Besançon, Dijon, Lyon, Reims, Grenoble, Strasbourg, Nanc-Metz, série E

Ex. 429. *4 points.* ./1981/besançonE/exo-1/texte.tex

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z^2 - \mathrm{i}z + 3 - \mathrm{i} = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

2° On construira les images des trois solutions dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Prouver que le triangle ainsi obtenu est rectangle et isocèle et trouver les coordonnées de son barycentre.

Ex. 430. *4 points.* ./1981/besançonE/exo-2/texte.tex

$\mathscr{E}_3$ désigne un espace affine euclidien associé à l'espace vectoriel euclidien E_3, de dimension 3.
$\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}_3$. Soit f_α l'application affine de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathscr{E}_3$ qui, à tout point M de $\mathscr{E}_3$, de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ tel que

$$\begin{cases} x' = z + 1 \\ y' = x - 3 \\ z' = y + \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

1° a) Montrer que f_α est une isométrie de $\mathscr{E}_3$.

b) Montrer que l'application linéaire associée à f_α est une rotation vectorielle dont on déterminera l'axe.

2° a) Montrer que f_2 est une rotation dont on déterminera l'axe.

b) Montrer que f_α, pour $\alpha \neq 2$, est un vissage dont on précisera l'axe (l'angle de f_α n'est pas demandé).

☆Problème 120 *12 points.* ./1981/besançonE/pb/texte

-I-

A- Soit f la fonction numérique de la variable réelle f définie par :

$$\forall x,\ x \in \mathbb{R}^\star\ :\quad f(x) = x\ln(x^2) - 2x \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1.- Montrer que f est continue au point d'abscisse 0.

2.- Étudier la variation de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé du plan affine : $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Préciser en particulier : la tangente à (C) au point O ainsi que les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe $(0,\ \vec{\imath})$.

3.- Démontrer que la restriction de f à $[-1\,;1]$ admet une réciproque notée g. (Ne pas chercher à expliciter g).
Préciser l'ensemble de définition de g et tracer sa courbe représentative (Γ) sur le repère précédent.

B- Soit α un nombre réel tel que : $0 < \alpha \leqslant \mathrm{e}$.

1.- Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe $(0,\ \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \mathrm{e}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2.- $\mathscr{A}(\alpha)$ a-t-elle une limite lorsque α tend vers zéro par valeurs positives ?

C- Un point mobile du plan M a des coordonnées, dans $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, dont l'expression en fonction du temps t $(t \in \mathbb{R})$ est

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-t} \\ y = -2\mathrm{e}^{-t}(t+1) \end{cases}$$

Retour page 1

1.- Démontrer que la trajectoire de M est une partie de la courbe (C). Caractériser cette partie.

2.- Déterminer, suivant les valeurs de t, l'allure du mouvement.

-II-

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel de base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et ϕ_a l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice est, relativement à cette base :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+a) & \frac{1}{2}(1-a) \\ \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{2}(1+a) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Soit P le plan affine associé, de repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et F_a l'application affine de P, d'endomorphisme associé ϕ_a et telle que $F_a(O) = O$.

1.- Déterminer, suivant les valeurs de a, l'ensemble des points invariants par F_a.

2.- a) Déterminer l'ensemble E des valeurs de a pour lesquelles F_a est non bijective.

b) Dans le cas où a appartient à E, prouver que F_a est une projection ponctuelle ; en donner ses éléments caractéristiques.

3.- a) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles F_a est involutive ?

b) Dans le cas a remplit la condition précédente avec $a < 0$, prouver que la courbe (Γ) de I A3 est une partie de la courbe $F_a((C))$, où C est la courbe tracée au I A2

VI. Besançon remplacement, série E

Ex. 431. ./1981/besanconErem/exo-1/texte.tex

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto f(t) = \ln\left|\frac{t}{1-t}\right|$$

1. Trouver l'ensemble de définition D de f et calculer $f'(t)$ pour tout t de D.

2. Pour tout $x > 1$, soit $\varphi = \displaystyle\int_2^x \frac{\ln t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $\varphi(x)$ en intégrant par parties.

3. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 1 avec $x > 1$.

VII. Bordeaux remplacement, série C

Ex. 432. ./1981/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:

$$(f \circ f)(x) = x.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

c) Construire $(\mathscr{C})$.

2° Soit $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

On considère les points A_λ de coordonnées $(\frac{1}{2}+\lambda\,;\,0)$ et B_λ de coordonnées $(0\,;\,\frac{1}{2}-\lambda)$.

On note D_λ la droite déterminée par les points A_λ et B_λ.

a) Déterminer une équation de D_λ sous la forme $a(\lambda)x+b(\lambda)y+c(\lambda)=0$ où a, b et c sont trois fonctions dérivables de la variable λ que l'on déterminera.

b) Soit D'_λ la droite d'équation $a'(\lambda)x+b'(\lambda)y+c'(\lambda)=0$, où a', b' et c' désignent les fonctions dérivées respectives de a, b et c.

Vérifier que pour toute valeur de λ dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, les droites D_λ et D'_λ sont sécantes en un point M_λ.

Démontrer que les coordonnées $(x_\lambda\,;\,y_\lambda)$ de M_λ sont :

$$x_\lambda=\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2 \quad \text{et} \quad y_\lambda=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2.$$

c) Démontrer que, lorsque λ décrit $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, le point M_λ décrit la courbe $(\mathscr{C})$.

d) Démontrer que, pour tout $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, la droite D_λ est tangente à M_λ à $(\mathscr{C})$.

VIII. Caen, série C

✻ Ex. 433. ./1981/caenC/exo-1/texte.tex

P est un plan affine muni d'un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et f l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées x et y, associe le point M' de coordonnées x' et y' telles que

$$x'=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3} \quad ; \quad y'=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{2}{3}.$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points invariants par f.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à un direction fixe.
3. Montrer que l'on peut trouver un couple $(\alpha,\ \alpha')$ de réels vérifiant $\alpha+\alpha'=1$, tels que, pour tout point M, le barycentre du système$\{(M,\ \alpha)(M',\ \alpha')\}$ soit invariant par f.
   En déduire une construction simple de l'image par f d'un point M quelconque.

IX. Dijon, série C

☆**Problème 121** ./1981/dijonC/pb/texte

I. E désigne un plan vectoriel euclidien. le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}.\vec{v}$.
Dans tout le problème, $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\begin{cases} \vec{e_1}.\vec{e_1}=1\\ \vec{e_2}.\vec{e_2}=1\\ \vec{e_1}.\vec{e_2}=\cos\theta, \qquad \text{où } \theta \text{ est un réel appartenant à } \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

1° Montrer que $(\vec{e_1},\ \vec{e_2})$ est une base de E. $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ étant des vecteurs de coordonnées respectives $(\alpha,\ \beta)$ et $(\alpha',\ \beta')$ dans cette base, exprimer $\vec{u}.\vec{u'}$ en fonction de ces coordonnées et de θ.

2° On note :

$$\vec{\imath}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}(\vec{e_1}+\vec{e_2}), \qquad \vec{\jmath}=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}(-\vec{e_1}+\vec{e_2}).$$

Démontrer que $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base orthonormé de E. Déterminer les coordonnées de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

3° Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall \vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \frac{1}{2}[(\vec{u}.\vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{u}.\vec{e_2})\vec{e_2}].$$

Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

II. $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien associé à E. Soit O un point de $\mathscr{P}$. D_1 est la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\vec{e_1}$, D_2 est la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\vec{e_2}$.
Pour tout point M de $\mathscr{P}$, on appelle :

– M_1 la projection orthogonale de M sur D_1 ;
– M_2 la projection orthogonale de M sur D_2.

Dans toute la suite du problème, M' désigne le milieu de (M_1, M_2).

1° a) Démontrer que :

$$\overrightarrow{OM_1} = (\overrightarrow{OM}.\vec{e_1})\vec{e_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = (\overrightarrow{OM}.\vec{e_2})\vec{e_2}.$$

b) Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} g : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto g(M) = M' \end{aligned}$$

est une bijection affine dont f est l'automorphisme associé.

Exprimer les coordonnées $(x' \,;\, y')$ de M' dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ en fonction des coordonnées (x ; y)de M dans le même repère.

c) Préciser la nature des points invariants de g.

2° Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image (C') de (C) par l'application g.
Comment faut-il choisir θ pour que (C') soit un cercle ? Dans le cas contraire, préciser les coordonnées des foyers de (C') ainsi que son excentricité.

III. Soit λ un réel strictement positif. Comment faut-il choisir λ pour qu'il existe des points M de $\mathscr{P} - \{O\}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = \lambda \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \ ?$$

(On pourra ramener ce problème à l'étude d'une équation de la forme $ax^2 + by^2 = 0$ où a et b sont des nombres dépendants de λ et θ.)
En déduire que :

$$\forall M \in \mathscr{P} - \{O\} \ : \qquad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant \frac{\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} \leqslant \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

IV. 1° Soit φ l'application de E×E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E} \ : \qquad \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.f(\vec{v}).$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

2° Démontrer que :
quels que soient les points A et M de $\mathscr{P}$, d'images respectives A' et M' par g, on a :

a $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA'}$,
b $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OM}$.

3° Soit Δ une droite vectorielle de E. Quel est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit orthogonal à Δ ? (On pourra utiliser IV(2)b).

Retour page 1

X. Groupe I, série C

Ex. 434. ./1981/groupeIC/exo-1/texte.tex

Calculer les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \, dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin x \, dx, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \, dx.$$

Ex. 435. ./1981/groupeIC/exo-2/texte.tex

On sait que tout rationnel r peut être représenté, de façon unique, par une fraction *irréductible* $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\star)$.

Soit f l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}^\star$ définie par $f(r) = q$.

1° Montrer que 1 est une période de f.

2° a et b étant deux entiers naturels, montrer que si a et b sont premiers entre aux alors $a+b$ est premier avec a et avec ab.

3° On désigne par $r_0 = \frac{p_0}{q_0}$ (p_0 et q_0 premiers entre eux) un nombre rationnel de l'intervalle $]0\,;1[$.

Montrer qu'il existe des rationnels de la forme $\frac{p_0}{q}$ (p_0 et q premiers entre eux) tels que

$$f\left(\frac{p_0}{q} + \frac{p_0}{q_0}\right) = q.q_0.$$

En déduire que 1 est la plus petite période de f.

XI. Groupe I bis remplacement, série C

Ex. 436. ./1981/groupeIbisCrem/exo-2/texte.tex

1° Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 3^n par 7.

2° Déterminer le reste de la division par 7 du nombre A sachant que

$$A = (2\ 243)^{325} + (1\ 179)^{154}.$$

3° Le nombre B s'écrit en base 3 : $\overline{121010201}$.

Déterminer le reste de la division de B par 7.

Problème 122 ./1981/groupeIbisCrem/pb/texte

On désigne par $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques à variable réelle continues sur $\mathbb{R}_+^\star$.

A) 1° Montrer que, f étant un élément de $\mathscr{C}$ on peut associer à tout réel a strictement positif un réel, noté $F(a)$, défini par

$$F(a) = \int_a^{3a} \frac{f(t)}{t} \, dt.$$

2° a décrivant $\mathbb{R}_+^\star$, on définit ainsi une fonction F de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} \, dt.$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+\star$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad F'(x) = \frac{f(3x) - f(x)}{x}.$$

La fonction F est-elle un élément de $\mathscr{C}$?

3° Définir F dans les deux cas particuliers suivants :

a) $f : t \longrightarrow \dfrac{1}{t}$;

b) $f : t \longrightarrow 1$.

B) On étudie le cas où f est l'application $f : t \longrightarrow \cos t$ c'est à dire

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Le but de cette question est de dégager quelques propriétés de la fonction F définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1° Déterminer

a) le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$;

b) le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2° Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \left|\frac{f(t)}{t}\right| \leqslant \frac{1}{t}$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad |F(x)| \leqslant \log 3.$$

3° Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \log 3 - F(x) = 2\int_x^{3x} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t}\,dt$$

et que

$$0 \leqslant \log 3 - F(x) \leqslant 2x^2.$$

En déduire que F admet une limite à droite au point 0.

4° Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$m(x) = \frac{\log 3 - F(x)}{x}.$$

Étudier la limite de m à droite au point 0.

C) Soit G la fonction réelle telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G(x) = F(x)$$
$$G(0) = \log 3.$$

1° Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2° En exploitant la méthode d'intégration par parties, établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \left|G(x) - \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x}\right| \leqslant \frac{2}{3x}.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad |G(x)| \leqslant \frac{2}{x}$$

et étudier la limite de G en $+\infty$.

3° Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad G'(x) = \frac{-4\cos x.\sin^2 x}{x}.$$

4° Déterminer l'ensemble des nombres réels pour lesquels la fonction G présente un extrémum. Déterminer les intervalles sur lesquels G est

a) Croissante.

b) Décroissante.

5° On désigne par G_1 la restriction de G à l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
Donner le tableau de variation de G_1 sans préciser les valeurs des extrémums et en déduire que, sur $\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, G_1 admet un zéro.

XII. Limoges, série C

☆Problème 123

./1981/LimogesC/pb/texte

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$. On considère les suites $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Z_{n+2} - 2Z_{n+1}\cos\theta + Z_n = 0. \tag{1}$$

On donne d'autre part un plan $\mathscr{P}$ de repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. Le nombre Z_n est représenté par le point M_n de coordonnées x_n et y_n ; x_n et y_n désignant respectivement la partie réelle et imaginaire de Z_n.

A) Pour les constructions demandées dans cette partie, on prendra :

$$Z_0 = 3 + \mathrm{i}, \quad Z_1 = 1 + 2\mathrm{i}.$$

1) On suppose dans cette question que $\theta = 0$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3. Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
Calculer $\overrightarrow{M_0M_n}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M_1}$ et n.

2) On suppose dans cette question que $\theta = \frac{\pi}{3}$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3. Démontrer que la suite (Z_n) est périodique.

3) On suppose dans cette question que $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3. Démontrer que quel que soit n, le point O est isobarycentre de M_{n+1}, M_{n+2}. Montrer que la suite (Z_n) est périodique.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$. On appelle α et β ses racines.
Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$ avec λ et μ complexes quelconques, alors la suite (Z_n) vérifie la relation(1).

B) On prend dans cette partie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = \lambda(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + m\lambda(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta),$$

où λ est un complexe donné non nul, $\lambda = a + ib$ avec a et b réels, $\overline{\lambda}$ son conjugué et m un réel donné.

1) Remarquer que la suite (Z_n) vérifie la relation (1).

2) Calculer x_n et y_n en fonction de a, n, m, θ.

3) Exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de x_n et y_n pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

4) Montrer que si m est différent de 1 et de -1, les points M_n appartiennent à une conique qu'on précisera. La construire pour $\lambda = 3 + 4\mathrm{i}$et $m = \frac{1}{2}$..

5) Montrer que si $m = 1$, alors Z_n est réel. Exprimer dans ce cas Z_n en fonction de a, b, θ. Préciser Z_n dans le cas où $\lambda = 1$ puis $\lambda = \mathrm{i}$.

C) On désigne par $(\mathscr{E}, +, .)$ l'espace vectoriel des suites réelles et par $\mathscr{E}'$ l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1).

1) Montrer que $\mathscr{E}'$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'application : $\begin{array}{ccc} \mathscr{E}' & \to & \mathbb{R}^2 \\ (U_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (U_0,\ U_1) \end{array}$. Montrer que cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de $\mathscr{E}'$?

Retour page 1

3) Montrer que si $\theta \neq 0$et $\theta \neq \pi$, la question B5 fournit deux suites linéairement indépendantes de $\mathscr{E}'$. En déduire la forme générale des suites de $\mathscr{E}'$.

4) Retrouver, pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ les périodes obtenues dans la partie A.

XIII. Lille, série C

Ex. 437. *4 points.* ./1981/lilleC/exo-1/texte.tex

1° Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.

2° Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$.

3° Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système

$$\begin{cases}(3a+5b)(a+2b) = 1\ 276\\ ab = 2m\end{cases}$$

où m désigne le plus petit multiple commun de a et b.

XIV. Orléans Tours, série C

Ex. 438. *3 points.* ./1981/orleansC/exo-1/texte.tex

On note $\overline{x}$ la classe d'un entier naturel selon la relation de congruence modulo 10.

1° Expliciter l'ensemble $\mathbb{C}$ des classes des entiers n^2 quand n décrit l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels.

2° Déterminer le plus entier naturel n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 on ait

$$\overline{(n!)} = \overline{0}.$$

(On rappelle que pour tout entier naturel n non nul

$$n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n \quad \text{et que} \quad 0! = 1).$$

3° Pour n entier non nul on pose

$$u_n = 1!+2!+3!+\cdots+n!$$

Déterminer l'ensemble D des entiers naturels n tels que u_n soit un carré parfait.

Ex. 439. *5 points.* ./1981/orleansC/exo-2/texte.tex

1° Soit φ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$\varphi(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de φ.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de φ sur son ensemble de définition.

Étudier $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2° a) Montrer qu'il existe une fonction f définie et continue sur $[-1\,;1]$ et telle que

$$\forall x\in[-1\,;0[\cup]0\,;1], \qquad f(x) = \varphi(x).$$

b) Cette fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3° Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;1]$. On précisera en particulier $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

☆Problème 124 *12 points.* *./1981/orleansC/pb/texte*

N.B- Dans ce problème, les II2., II3., II4. de la partie II peuvent être traités indépendamment de I.
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée direct de E.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, on notera $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base $(\vec{u})$, $P_{(\vec{u},\,\vec{v})}$ le plan vectoriel de base $(\vec{u},\,\vec{v})$.

-I- 1° Quelle est l'image de la base $\mathscr{B}$ par la projection orthogonale sur $P_{(\vec{i},\,\vec{j})}$?
On notera p cette projection.

2° On considère le plan vectoriel $P_{(\vec{i},\,\vec{k})}$ orienté par $\vec{j}$.

a) Montrer que la base $(\vec{k},\,\vec{i})$ est alors orientée dans $P_{(\vec{i},\,\vec{k})}$.

b) Déterminer la matrice, dans la base $(\vec{k},\,\vec{i})$, de la rotation vectorielle P_α de ce plan, de mesure α en radian (α étant un réel de $[0\,;\pi[$).
Exprimer, en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{k}$, les images des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ par cette rotation vectorielle.

c) En déduire l'image de la base $\mathscr{B}$ par la rotation vectorielle r_α de E, d'axe $D_{\vec{j}}$ orienté par $\vec{j}$ et de mesure α en radians.

3° Soit Q_α l'image du plan vectoriel $P_{(\vec{i},\,\vec{j})}$ par la rotation vectorielle r_α.

a) Déterminer la base de Q_α, image de $(\vec{i},\,\vec{j})$ par la rotation vectorielle r_α. $r_\alpha(\vec{i})$ sera noté $\vec{u}$.

b) Déterminer l'image de la base $\mathscr{B}$ par q, projection orthogonale de E sur Q_α.

c) Vérifier que $r_\alpha \circ p = q \circ r_\alpha$.

d) Montrer que dans la base $\mathscr{B}$, le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour image par $p \circ q$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x\cos^2\alpha \\ y \\ -x\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}$.

4° Soit $\vec{u}$ le vecteur défini en **??**.

a) Montrer que $(q \circ p)(\vec{u}) = (\cos^2\alpha).\vec{u}$.

b) Discuter selon les valeurs de α la nature de

$$h : \begin{array}{rcl} D_{\vec{u}} & \longrightarrow & D_{\vec{u}} \\ \vec{x} & \longmapsto & (q\circ p)(\vec{x}) \end{array}.$$

c) Montrer que l'image, par $q \circ p$, du plan vectoriel Q_α est incluse dans Q_α.

5° a) Déterminer, dans la base $(\vec{u},\,\vec{j})$, la matrice de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{rcl} Q_\alpha & \longrightarrow & Q_\alpha \\ \vec{x} & \longmapsto & (q\circ p)(\vec{x}) \end{array}.$$

b) Déterminer la valeur de α pour laquelle f n'est pas bijective.
Que peut-on dire alors de $P_{(\vec{i},\,\vec{j})}$ et $Q\alpha$?

-II- Soit $(\mathscr{E})$ un espace affine associé à E et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Soit $\overline{Q}_\alpha$ la plan affine de direction Q_α et contenant le point O.
Soit φ l'application affine de $\mathscr{E}$ qui au point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans $\mathscr{R}$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ dans $\mathscr{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x' = x\cos^2\alpha \\ y' = y \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0\,;\pi[\ \ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} \\ z' = -x\cos\alpha\sin\alpha. \end{cases}$$

1° Montrer que l'image de $\overline{Q}_\alpha$ par l'application φ est contenue dans $\overline{Q}_\alpha$.

2° Soit ψ l'application $\psi : \overline{Q}_\alpha \longrightarrow \overline{Q}_\alpha$
$M \longmapsto \varphi(M)$

Quelle est l'expression analytique de ψ dans le repère $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{j})$ où

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{k}\ ?$$

3° Soit $\mathscr{C}$ la courbe du plan $\overline{Q}_\alpha$ dont les points M de coordonnées $(x,\ y)$ dans el repère $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{j})$ vérifient :

$$9x^2 - 18x + 16y^2 - 32y - 56 = 0.$$

Quelle est la nature de $\mathscr{C}$?*
Donner le centre et la mesure des axes.

4° Déterminer dans $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{j})$ une équation cartésienne de $\psi(\mathscr{C})$.
Quelle est la nature de $\psi(\mathscr{C})$?
Donner le centre par ses coordonnées et préciser selon les valeurs de α la mesure du grand axe.
Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\psi(\mathscr{C})$ est un cercle dont on précisera le rayon.

XV. Paris remplacement, série C

Ex. 440. ./1981/parisCrem/exo-1/texte.tex

1° Déterminer les suites géométriques non constantes d'entiers strictement positifs telle que la somme de leurs quatre premiers termes soit égale à 40.

2° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_n = 3^n$ pour tout entier naturel n. Quelle est la plus petite valeur n_0 de n telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} u_i$ soit supérieure à 10^3 ?

3° Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre μ_n =P.G.C.D$(u_n + 1,\ u_{2n} + 1)$, où u_n est le terme général de la suite définie au 2.

Ex. 441. ./1981/parisCrem/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien. Si M et N dont deux points de ce plan, on note MN leur distance.

1° Soit A, B, C trois points de P tels que

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 5 \quad \text{et} \quad \mathrm{BC} = 6.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2° On désigne par G le barycentre de (A, 2), (B, 3), (C, 3). Construire le point G et calculer la distance GA.

3° On considère l'application f de P dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M de P associe le réel

$$f(M) = 2\overrightarrow{M\mathrm{B}}.\overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}.\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{A}}.\overrightarrow{M\mathrm{B}}.$$

Démontrer que l'on a pour tout point M de P :

$$f(M) = f(\mathrm{G}) + 4M\mathrm{G}^2.$$

Calculer numériquement $f(\mathrm{A})$ et $f(\mathrm{G})$.

4° Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que $f(M) = f(\mathrm{A})$.

☆Problème 125
./1981/parisCrem/pb/texte

Soit P un plan affine orienté muni d'un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
A tout nombre complexe

XVI. Paris remplacement, série E

✻ Ex. 442. ./1981/parisErem/exo-1/texte.tex

A tout entier naturel non nul n on associe le réel

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1° Calculer u_1.

2° Trouver, pour tout entier non nul n, une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} et en déduire que

$$u_n = \mathrm{e} - 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}.$$

3° Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\right) = \mathrm{e}$.

✻ Ex. 443. ./1981/parisErem/exo-2/texte.tex

On définit les deux applications :

$$\varphi :]0\,;\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \qquad x \longmapsto \coth x - 2x$$

$$f : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad . \qquad x \longmapsto x\cos^2 x$$

1° Étudier les variations de φ et en déduire que l'équation :

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in]0\,;\pi[$$

admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

2° Étudier les variations de f. (On utilisera $\varphi(x)$ pour étudier le signe de $f'(x)$).

3° Soit C la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. Construire C et les tangentes à C aux points d'abscisses 0 et π.

✩Problème 126 ./1981/parisErem/pb/texte

Le problème est le même que pour la série C. 125

Chapitre 22

1982.

Sommaire

I. Aix-Marseille, série C

Ex. 444. *4 points.* *./1982/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté et $\mathscr{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$.
Á tout nombre complexe z, $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x ; y)dans le repère $\mathscr{R}$.
Le nombre complexe conjugué de z est noté $\overline{z}$. Soit (E) l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}\left(z^2 - (\overline{z})^2\right) = 1.$$

Soit r la rotation affine de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ en radians. Soit (E') l'image de (E) par r.

1° Déterminer une équation cartésienne de (E') dans le repère $\mathscr{R}$. Reconnaître la nature de (E').

2° En déduire le tracé de (E) dans le repère $\mathscr{R}$; on prendra 5 cm pour unité graphique.

Ex. 445. *3 points.* *./1982/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

(La question 3 peut être traitée indépendamment des deux questions précédentes.)
On envisage une particule π pouvant occuper deux positions A et B se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

a) La position initiale (au temps 0) de la particule π est A. Au temps n, $n \in \mathbb{N}^\star$, la particule π est soit en A soit en B.

b) Entre deux instants successifs, n et $(n+1)$, la particule π saute éventuellement d'une position à l'autre.
Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut est par ailleurs indépendante de la position de la particule π au temps n.

On ne demandera pas d'expliciter d'espaces probabilisés. Mais nous pouvons traduire en termes mathématiques la situation de la façon suivante :
si $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « la particule π est en A au temps n » et B_n l'événement « la particule π est en B au temps n ».
Ainsi $A_n \cap A_{n+1}$ est l'événement « la particule π est en A au temps n et aussi au temps (n+1) », etc...
Soit respectivement α_n et β_n le probabilité des événements A_n et B_n.
On donne un nombre θ dans l'intervalle $]0\,;1[$. Nous exprimerons a et b par les *hypothèses* :

a') $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n + \beta_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$,

b') La probabilité de $A_n \cap A_{n+1}$ est $\theta\alpha_n$, celle de $B_n \cap B_{n+1}$ est $\theta\beta_n$.

1° Calculer, en fonction de θ et β_n, la probabilité de l'événement $\mathrm{B}_n \cap \mathrm{A}_{n+1}$ (c'est à dire de l'événement « la particule π se trouve en B au temps n et en A au temps $(n+1)$).

2° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1-\theta)$.

3° Du résultat de la question précédente et de $\alpha_0 = 1$, déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_n = \dfrac{(2\theta-1)^n}{2} + \dfrac{1}{2}$.
Quelle est la limite de la suite (α_n) quand n tend vers $+\infty$?

☆**Problème 127** *13 points.* *./1982/aixmarseilleC/pb/texte*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'application de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{si} \quad k \neq 0 \quad f_k(x) = x^k\sqrt{1-x}, \qquad \text{et} \quad f_0(x) = \sqrt{1-x}.$$

I. 1° Étudier la continuité de f_k et la dérivabilité de f_k.

2° Donner,

II. Amiens, série C

Ex. 446. *./1982/amiensC/exo-1/texte.tex*

(P) est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit φ l'application de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4. \end{cases}$$

Montrer que φ est une isométrie affine de (P) que l'on précisera.

Ex. 447. *série C et E, 4 points.* *./1982/amiensC/exo-2/texte.tex*

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et B=$(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ une base orthonormée de E.
Soit φ l'endormorphisme de E défini analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}\left(-x + z\sqrt{3}\right) \\ y' = -y \\ z' = \dfrac{1}{2}\left(-x\sqrt{3} - z\right). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est une isométrie de E.
2. a) Chercher le sous-espace vectoriel U de E des vecteurs transformés par φ en leurs opposés. On en donnera une base.
   b) Montrer que les sous-espace U' orthogonal de U est globalement invariant par φ. On en donnera une base.
   c) Le plan engendré par les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ étant supposé orienté par la base directe $(\vec{e_3},\ \vec{e_1}$, préciser la restriction de φ à cette base.
3. En conclure qu'il existe deux isométries φ_1 et φ_2 de E que l'on caractérisera avec précision telles que

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

III. Grenoble, série C

Ex. 448. *3 points* *./1982/grenobleC/exo-1/texte.tex*

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^6 = -1$ où z est l'inconnue.
2. Mettre le polynôme $x^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes à coefficients réels.

Retour page 1

IV. Nice, série C

Ex. 449. ./1982/niceC/exo-1/texte.tex

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
Soit C la courbe d'équation :

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0.$$

1. Démontrer que C est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité. Tracer C.
2. Soit D la droite d'équation $y - 3 = 0$.
   On désigne par $\mathrm{d}(M,\ D)$ la distance du point M à la droite (D). Soit P le point de coordonnées $(-4\ ;\ 6)$; $\mathrm{d}(M,\ P)$ désigne la distance de M à P.
   Quel est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{d}(M,\ P) = 2\mathrm{d}(M,\ D)$?

V. Orléans Tours, série C

Ex. 450. *4 points.* ./1982/orleansC/exo-1/texte.tex

1° Résoudre, dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, l'équation (1)

$$2(1+\mathrm{i})z^2 + 2(a+\mathrm{i})z + \mathrm{i}a(1-\mathrm{i}) = 0 \qquad (1)$$

où z est l'inconnue complexe, et a un paramètre réel.

2° A tout nombre complexe z, on associe dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point M d'affixe z.
Déterminer l'ensemble E des points, images des solutions de l'équation (1), quand a décrit $\mathbb{R}$.

3° Quel est l'ensemble transformé de E par la similitude directe plane S, de centre $I\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$, d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$?

Ex. 451. *4 points.* ./1982/orleansC/exo-2/texte.tex

$\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cube de sommets O, A, B, C, D, E, F, G, défini par

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\imath},\ \overrightarrow{OC} = \vec{\jmath},\ \overrightarrow{OB} = \vec{\imath} + \vec{\jmath},\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \vec{k}.$$

1° Dessiner $\mathscr{C}$; soit r_1 la rotation de $\mathscr{E}$, d'axe (OA) dirigée par $\vec{\imath}$, dont une mesure de l'angle est $+\dfrac{\pi}{2}$; soit r_2 la rotation de $\mathscr{E}$, d'axe (OC) dirigée par $\vec{\jmath}$, dont une mesure de l'angle est $-\dfrac{\pi}{2}$.
On pose $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.
Montrer que f et g sont des rotations de $\mathscr{E}$, définies par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ M(x\ ;\ y\ ;\ z) & \longmapsto & f(M)\left|\begin{array}{l} -y \\ -z \\ x \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ M(x\ ;\ y\ ;\ z) & \longmapsto & g(M)\left|\begin{array}{l} -z \\ -x \\ y \end{array}\right. \end{array}.$$

(On ne cherchera ni l'axe, ni l'angle de chacune des rotations f et g).

2° On note A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 les images respectives par f des points A, B, C, D, E, F, G et A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, les images respectives par g des points A, B, C, D, E, F, G.
Montrer que $\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1\} = \{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2\}$.

3° On pose $\varphi = g \circ f^{-1}$. Quelle est l'image $\mathscr{C}_2$ par φ de la liste ordonnée de points $\mathscr{C}_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$?
Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'axe.

☆Problème 128 *12 points.*

./1982/orleansC/pb/texte

I. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$x \longmapsto f(x) = x \log \left| x + \frac{1}{x} \right|$$

où log désigne la fonction logarithme népérien de base e.

1° Préciser l'ensemble de définition D_f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f, en énonçant les théorèmes utilisés.

2° a) Étudier la dérivabilité de f', fonction dérivée de f, et en déduire les variations de f'.

b) Soit F la restriction de f' à l'intervalle $I =]-1\,;0[$.
Démontrer que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser.
En déduire que dans I, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique, notée a ; on ne cherchera pas à calculer a, mais on montrera que $a > -\dfrac{1}{2}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

d) Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_f$, et les variations de f.

3° Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. (On pourra utiliser le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$).

4° Pour une étude locale de f au voisinage de zéro, on adoptera le plan suivant :
soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto h(x) = f(x) \quad \text{pour } x \neq 0 \end{array} \qquad \text{et} \qquad h(0) = 0.$$

a) Démontrer que h est le prolongement par continuité de f en zéro.

b) Étudier la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion de la partie **??** : Donner le tableau de variation de f et construire la courbe (C) représentative de f dans P plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, en précisant l''intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

II. P est la plan affine euclidien muni du repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit s l'application de P dans P définie par :

$$\begin{array}{rl} s : P & \longrightarrow P \\ M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. & \longmapsto s(M) = M' \left| \begin{array}{l} x' = x - 1 \\ y' = y \end{array} \right. \end{array}$$

1° Déterminer la nature et les points invariants de s.

2° Soit (C') est l'image de (C) par s, (C) étant la courbe représentative dans P de la fonction f étudiée dans la partie I. Construire (C') dans le même repère que (C).

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant (C') comme courbe représentative dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Calculer $g(x)$ et préciser D_g ensemble de définition de g.

III. 1° Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f(n) < 1 < f(n+1)$.
En déduire l'encadrement suivant de e :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Préciser cet encadrement pour $n = 1$. Soit $\ell(n)$la largeur de cet encadrement, c'est-à-dire :

$$\ell(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\ell(n)$ est majoré par $\dfrac{4}{n}$ et minoré par $\dfrac{2}{n}$.

2° Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3}, c'est à dire :

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \right| < 10^{-3}.$$

Retour page 1

VI. Paris, série C

Ex. 452. ./1982/parisC/exo-1/texte.tex

Pour chaque couple (a, q) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant q \leqslant a$, on note b_q le quotient dans la division euclidienne de a par q.
On appelle S_q l'ensemble des entiers naturels non nuls b tels que s soit le quotient dans la division euclidienne de a par b.

1° On suppose que $a = 1982$.

a) Déterminer b_1 ; b_8 ; b_9 et b_{1982}.

b) Soit b un entier naturel non nul.
Démontrer que $b \leqslant b_8$ si, et seulement si, $8b \leqslant 1982$.
Démontrer que $b > b_8$ si, et seulement si, $9b > 1982$.

c) En déduire que $S_8 = \{b \in \mathbb{N}\ ;\quad b_9 < b \leqslant b_8\}$.
Déterminer le cardinal de S_8.

2° On suppose que a est quelconque et que $1 \leqslant q < a$.

a) Démontrer que $S_q = \{b \in \mathbb{N}\ ;\quad b_{q+1} < b \leqslant b_q\}$.

b) Démontrer que $\forall a \geqslant 1$

$$\sum_{q=1}^{a} \operatorname{Card}(S_q) = a$$

où $\operatorname{Card}(S_q)$ désigne le cardinal de S_q.

Ex. 453. ./1982/parisC/exo-2/texte.tex

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois muni d'un repère orthonormé $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et $\mathscr{E}$ un espace affine muni du repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On donne l'application f_α de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M' = f_\alpha(M)$ de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ définies par

$$\begin{cases} x' = -z + \alpha \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{cases}$$

où α est un réel donné.

1° Montrer que f_α est un déplacement que l'on caractérisera.

2° Pour quelle valeur de α ce déplacement f_α est-il une rotation ?
Préciser dans ce cas l'axe de rotation.

3° Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$.
Montrer que f_1 est un vissage dont on précisera l'axe.

☆Problème 129

./1982/parisC/pb/texte

Pour chaque entier k strictement positif, on définit une application f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$.

On a appelle f_0 l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1° a) Démontrer que pour chaque $k \geqslant 1$, la fonction f_k est croissante sur $\mathbb{R}^+$; en déduire suivant la parité de l'entier k, le sens de variation des fonctions f_k.

b) Étudier, en discutant suivant les valeurs de $k \geqslant 1$, les limites de $f_k(x)$ et de $\dfrac{f_k(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives $\mathscr{C}_k$ des fonctions f_k ?

c) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par deux points fixes ; construire sur une même figure dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$. On précisera s'il y a lieu les asymptotes. (On prendra 2 cm comme unité).

2° Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \log(x + \sqrt{x^2+1})$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (log désigne la fonction logarithme népérien).
En déduire la valeur de I_0.

b) Calculer I_1.

c) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la relation

$$k.I_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$$

En déduire I_2 et I_3.

d) Démontrer que $I_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite (I_k) quand k tend vers $+\infty$.

3° Soit u_0 un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$; on définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour $k > 0$ fixé $u_1 = f_k(u_0)$ $u_n = f_k(u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$.

a) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) On suppose $k \geqslant 2$.
Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n < \dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (que l'on précisera) quand n tend vers $+\infty$.

4° Pour chaque entier k strictement positif on définit une application g_k de $[0\,;1]$ dans $\left[0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $g_k(x) = f_k(x)$.

a) Démontrer que pour chaque entier $k \geqslant 1$, la fonction g_k admet une fonction réciproque g_k^{-1}.

b) Construire sur la figure précédente les courbes représentatives des fonctions g_k^{-1} pour $k = 1,\ 2,\ 3$.

c) Donner l'expression des fonctions g_1^{-1} et g_2^{-1}.

VII. Poitiers, série C

Ex. 454. ./1982/poitiersC/exo-1/texte.tex

Dans l'exercice, les lettres a, b, p, q désignent des entiers relatifs.

1° a) Supposons que $a = 9p + 4q$ et $b = 2p + q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même *pgcd*.

b) Démontrer que les entiers $9p + 4$ et $2p + 1$ sont premiers entre eux.

2° Déterminer le *pgcd* des entiers relatifs $9p + 4$ et $2p - 1$ en fonction des valeurs de p.

VIII. Pondichéry, série C

Ex. 455. ./1982/pondicheryC/exo-1/texte.tex

On considère le nombre A qui s'écrit dans le système décimal : $A = \overline{xyxyxyxyx5}$, x et y étant des chiffres de ce système, x étant non nul.

1° Á quelle condition ce nombre est-il divisible par 25 ?

2° Déterminer les différentes valeurs de A, telles que A soit divisible par 225.

3° On considère le nombre $B = \overline{xyxyxy}$ toujours écrit dans le système décimal avec x et y qui sont des chiffres, x étant non nul. Déterminer B tel que B soit divisible par 225.

Ex. 456. ./1982/pondicheryC/exo-2/texte.tex

1° Soit φ la fonction numérique définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = 1 + \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t.$$

Étudier les variations de φ. En déduire le signe de $\varphi(t)$ suivant les valeurs de t.

2° On définit la fonction numérique f par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}\ f(x) = \frac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Étudier les variations de f.

Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f $\left(\text{on pourra poser } t = \frac{1}{x}\right)$.

Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 6 cm (on admettra que la courbe est au-dessus de l'asymptote).

Ex. 457. ./1982/pondicheryC/exo-3/texte.tex

Notations : E est un espace affine, $\vec{E}$ est son espace vectoriel associé. f_1 et f_2 sont deux applications affines de E dans E, $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ sont les endomorphismes associés respectivement à f_1 et f_2.
Pour tout point M de E, on notera M_1 le point $f_1(M)$ et M_2 le point $f_2(M)$.
Étant donné deux réels α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, on étudie dans la suite du problème l'application f (qui dépend de f_1, f_2, α_1, α_2) qui à tout point M de E associe le point $f(M)$ barycentre de M_1 affecté du coefficient α_1 et de M_2 affecté du coefficient α_2.
On notera M' l'image par f du point M.

Partie A *Étude de deux cas particuliers :*

1° Dans cette question, $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont deux éléments de $\vec{E}$, f_1 est la translation de vecteur $\vec{V_1}$ et f_2 est la translation de vecteur $\vec{V_2}$.

Montrer que f est la translation de vecteur $\alpha_1\vec{V_1} + \alpha_2\vec{V_2}$.

2° Dans cette question, E est un plan affine, D est une droite affine de E, $\vec{D'}$ est une droite vectorielle de $\vec{E}$ distincte de la direction de D., $f_1 = \mathrm{Id}_E$ et f_2 est la projection affine sur D de direction $\vec{D'}$.

a) Montrer que les points de D sont invariants par f.

b) Exprimer $\overrightarrow{M_2M'}$ en fonction de α_1 et de $\overrightarrow{M_2M}$. Quelle est la nature de f ? Dessiner l'image M' d'un point M par f dans le cas où $\alpha_1 = 2$. Quelle est l'application f dans le cas où $\alpha_1 = -1$?

Partie B

1° Soit O un point de E. Montrer que :

$$\overrightarrow{O'M'} = \alpha_1\vec{f_1}(\overrightarrow{OM}) + \alpha_2\vec{f_2}(\overrightarrow{OM})$$

pour tout point M de E (on rappelle que M' désigne $f(M)$ et O' désigne $f(O)$. En déduire que f est une application affine, préciser son endomorphisme associé.

2° Si f_1 et f_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2, quelle est la nature de f (discuter) ?

3° Dans cette question E est un plan affine.

a) (A, B, C, D) est un parallélogramme de E $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC})$, g est une application affine.

Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

b) Soit (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) deux parallélogrammes $(\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}, \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2})$.

(On suppose que (A_1, B_1, C_1, D_1) n'est pas aplati), montrer qu'il existe une application affine notée f_2 telle que :

$$f_2(A_1) = A_2, \qquad f_2(B_1) = B_2, \qquad f_2(C_1) = C_2, \qquad f_2(D_1) = D_2.$$

c) Soit A', B', C', D' les barycentres respectifs de (A_1, α_1) et (A_2, α_2), (B_1, α_1) et (B_2, α_2), (C_1, α_1) et (C_2, α_2), (D_1, α_1) et (D_2, α_2).
Montrer que (A', B', C', D') est un parallélogramme.

Partie C

Dans ce paragraphe E est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. Á tout point M de E on associe son affixe z.

1° Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes de E. Montrer que f est soit une similitude directe, soit une application constante (on pourra utiliser les nombres complexes).

2° f_1 et f_2 sont de similitudes directes de même rapport k $(k > 0)$, de même angle θ, de centres respectifs A_1 et A_2.
Montrer que f est la similitude directe de rapport k, d'angle θ, et de centre A barycentre de (A_1, α_1) et (A_2, α_2).

3° [1]

a) Soit un carré (A, B, C, D) $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC})$ et g une similitude directe.
Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un carré tel que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{g(A)g(B)};\overrightarrow{g(D)g(C)}}\right).$$

b) (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$ et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1};\overrightarrow{A_1D_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2};\overrightarrow{A_2D_2}}\right).$$

Montrer qu'il existe une unique similitude directe f_2 telle que

$$f_2(A_1) = A_2, \qquad f_2(B_1) = B_2, \qquad f_2(C_1) = C_2, \qquad f_2(D_1) = D_2.$$

A', B', C', D' étant définis comme dans la question **B**(3c), montrer que (A', B', C', D') est un carré, éventuellement réduit à un point.

4° On donne trois points A_1, A_2 et B distincts. M_1 décrit le cercle de centre A_1 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B};\overrightarrow{A_1M_1}}\right) = \omega t$ $(\omega \neq 0)$.

M_2 décrit le cercle de centre A_2 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_2B};\overrightarrow{A_2M_1}}\right) = \omega t$.

M' est la barycentre de (M_1, α_1) et (M_2, α_2). Quel est le mouvement de M' (utiliser (**C**2)).

IX. Reims, série C

Ex. 458. *4 points* ./1982/reimsC/exo-1/texte.tex

1° Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.

2° Montrer que pour tout entier relatif n, les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

3° Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs n, $n \neq 2$, tels que

$$\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$$

soit un entier relatif.

1. pour a) et b) l'usage des nombres complexes est déconseillé.

✼ Ex. 459. ________ *4 points.* ./1982/reimsC/exo-2/texte.tex

1. Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$$

dans l'ensemble des nombres complexes.

2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs de

$$\cos\frac{11\pi}{12} \text{ et } \sin\frac{11\pi}{12}.$$

✩Problème 130 *12 points.* ./1982/reimsC/pb/texte

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
On munit l'ensemble $L(\mathrm{E})$ des endomorphismes de E de sa structure euclidienne usuelle d'espace vectoriel.

Pour chaque endomorphisme f de E, on note $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice relative à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et $T(f)$ le réel $a+d$.

L'application identique de E sera noté id.

On appelle F l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $M(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $(a,\ b,\ d)$ réels quelconques.

I- On note f_1, f_2, f_3 les endomorphismes de E de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivement dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1° Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $L(\mathrm{E})$ de base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.

2° Trouver deux éléments f et g de F tels que $g\circ f$ ne soit pas dans F.

3° Montrer qu'il existe un endomorphisme r de F, et un seul, vérifiant :

$$\begin{aligned} r(f_1) &= \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3), \\ r(f_2) &= f_1 - f_3, \\ r(f_3) &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + f_3). \end{aligned}$$

Soit un élément f de F tel que $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$; calculer (en fonction de a, b, d) $M(f')$ où $f' = r(f)$.

II- Soit t la restriction de T à F.

1° Montrer que t est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

2° Montrer que le noyau de t, noté $\ker t$, est un plan vectoriel de F contenant toujours les symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles de E.

3° Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de E, on note $S_{\vec{u}}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{u}$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E et α une mesure de l'angle du couple $(\vec{u},\ \vec{v})$.

a) Quelle est la nature de la transformation $R = S_{\vec{v}}\circ S_{\vec{u}}$?

b) Calculer $T(R)$ en fonction de α.

III- Soit $\varphi : F\times F \to \mathbb{R}$, l'application définie par $\varphi(f,\ g) = T(g\circ f)$.

1° Montrer que φ est un produit scalaire sur F.

2° a) Calculer $\varphi(f,\ id)$ pour tout $f\in F$.

b) En déduire l'orthogonal de $\ker t$ pour φ.

3° On reprend l'endomorphisme r défini à la question I3.

a) Montrer que r est une isométrie vectorielle de F pour le produit scalaire φ.

b) Calculer $r(id)$ et en déduire que $r(\ker t) = \ker t$.

c) Calculer $\varphi(f, r(f))$ pour tout f élément de $\ker t$.

d) En déduire que r est une rotation de F. Que peut-on dire de son angle ?

X. Rennes, série C

Ex. 460. *5 points.* ./1982/rennesC/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1).$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan (P) rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Soit λ un réel supérieur à 1, et,
$$\Delta_\lambda = \left\{ M(x\,;\,y) \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant \quad \lambda \\ 1 \leqslant y \leqslant f(x). \end{array} \right\}$$
Calculer l'aire $\mathscr{A}(\Delta_\lambda)$ de Δ_λ.
Étudier la limite de $\mathscr{A}(\Delta_\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Ex. 461. *3 points.* ./1982/rennesC/exo-2/texte.tex

1. Étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
2. Dans le système de numération décimale déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ défini par :
$$A(n) = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n.$$

☆Problème 131 *12 points.* ./1982/rennesC/pb/texte

Soient :
$\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien muni de la base orthonormée $\mathbb{B} = (\vec{i}\ \vec{j})$
P le plan affine euclidien muni du repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
Δ la droite affine d'équation $x - 2y = 0$
(D) la droite vectorielle de base $\vec{j}$.
Dans toute la suite du problème S désigne la symétrie affine par rapport à la droite (Δ) suivant la droite vectorielle (D) ; σ est l'endomorphisme associé à S. On appelle **F** l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que $f \circ \mathrm{S} = \mathrm{S} \circ f$.

I-

1. Démontrer que **F** n'est pas l'ensemble vide et que **F** est stable pour la loi de composition des applications, notée $\circ$.
Montrer que $(\mathbf{F}, \circ)$ est un groupe.
2. Au point $M(x\,;\,y)$, la symétrie affine S associe le point $M_0(x_0\,;\,y_0)$. Donner x_0 et y_0 en fonction de x et y.
3. Soit g l'application de P dans P qui au point $M(x\,;\,y)$ associe la point $M'(x'\,;\,y')$:
$$\left\{\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' &= -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$
Montrer que $g \in \mathbf{F}$.

4. Soit f une application affine bijective de P dans P d'endomorphisme associé φ. Démontrer que f est un élément de **F** si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées simultanément :

$$\begin{cases} f(O) \in (\Delta) \\ \exists a \in \mathbb{R}^\star,\ \varphi(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = a(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \\ \exists b \in \mathbb{R}^\star,\ \varphi(\vec{\jmath}) = b\vec{\jmath}. \end{cases}$$

Écrire alors en fonction de a et b la matrice M de φ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Vérifier ce résultat dans la cas particulier étudié au (I3)

5. a) Préciser les couples (a, b) pour que f soit une homothétie (caractériser géométriquement f).
   b) Préciser les couples (a, b) pour que f soit une translation. Caractériser f.
6. On appelle $\mathbf{F}_1$ le sous-ensemble des éléments de **F** dont l'endomorphisme associé φ vérifie : $\varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$.
   a) Montrer que $(\mathbf{F}_1, \circ)$ est un groupe.
   b) Soit f_1 un élément de $\mathbf{F}_1$.
   Démontrer que $M(x\,;\,y)$ a pour image $f_1(M) = M'$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$:

$$\begin{cases} x' = ax = 2\alpha \\ y' = \dfrac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} a \in \mathbb{R}^\star \\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ?
   (On discutera selon les valeurs de a et α).
   c) Vérifier que l'application g donnée au I3 est un élément de $\mathbf{F}_1$.
   On note $M' = g(M)$.
   Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par g. Si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.
   Calculer alors les coordonnées du point M_1 commun à la droite (MM') et à (E).
   Comparer $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{M_1M}$; en déduire une construction géométrique de M'.

II- 1. Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x.$$

Étudier et représenter F dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par (C) la courbe représentative de F.

2. a) Soit f_1 un élément quelconque de $\mathbf{F}_1$. Déterminer une équation de l'image de (C) par f_1.
   b) Soient : $(m, p) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ et $(C_{m,\,p})$ la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{mx+p} + \dfrac{1}{2}x$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que $(C_{m,\,p})$ est l'image de (C) par une application appartenant à $\mathbf{F}_1$.
3. Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-2x+2} + \dfrac{1}{2}x$.
   En utilisant la partie I, reconnaître l'application élément de $\mathbf{F}_1$ qui transforme (C) en (Γ).
   Dessiner (Γ) à partir du tracé de (C).
4. Construire l'image (C') de (C) par $g \circ \mathrm{S}$.
5. $(m, p) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, montrer, en utilisant I(6)a que tout autre courbe $(C_{m',\,p'})$ est l'image de la courbe $(C_{m,\,p})$ par une application appartenant à $\mathbf{F}_1$.

XI. Rouen, série C

✲ Ex. 462. 4 points ./1982/rouenC/exo-1/texte.tex

1. Résoudre l'équation d'inconnue $(x\ ;\ y)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$661x - 991y = 1.$$

   (On pourra remarquer que 1982 = 2 × 991 et 1983 = 3 × 661).

2. On considère deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = 3,\ v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + 991 \qquad v_{n+1} = v_n + 661.$$

   Indiquer tous les couples $(p\ ;\ q)$, avec p et q entiers naturels inférieurs à 2000 tels que $u_p = v_q$.

✲ Ex. 463. 4 points. ./1982/rouenC/exo-2/texte.tex

Soit V un espace vectoriel réel, de dimension 2 ou 3, A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans V, chacun distinct de $\{\overrightarrow{0}\}$ et de V.
On désigne par

- ☐ q la projection vectorielle sur A, de direction B
- ☐ q la projection vectorielle sur B, de direction A
- ☐ e l'identité dans V.

On rappelle que l'ensemble $L(V)$ des endomorphismes de V est un espace vectoriel réel pour l'addition des endomorphismes et la multiplication des endomorphismes par un réel.

$$\text{Soit } F = \{ap + bq\ ;\ (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel réel.
   Démontrer que $(p\ ;\ q)$ est une base de F.
2. Démontrer que F est stable pour la composition des endomorphismes.
3. Soit φ un élément de F. On pose $\varphi^0 = e$, et pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$.
   Calculer φ^n.
4. Déterminer l'ensemble des projections vectorielles éléments de F. Donner leurs éléments caractéristiques.

☆**Problème 132** *12 points.* ./1982/rouenC/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère orthonormé, $\left(O;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On note $\mathscr{P}^*$ le plan $\mathscr{P}$ privé du point O .

Un point M quelconque ayant pour coordonnées x et y par rapport au repère $\left(O;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ a pour affixe $z = x + \mathrm{i}y$; on note $\overline{z}$ le conjugué de z ; on désigne par $[r,\ \theta]$ le nombre complexe qui s'écrit $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec r un élément de $\mathbb{R}_+$ et θ un élément de $\mathbb{R}$.

A- Étant donné **un nombre complexe** a **non nul**, on considère l'application φ_a de $\mathscr{P}^*$ dans lui même telle que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathscr{P}^* & \longrightarrow & \mathscr{P}^* \\ & z & \longmapsto & \varphi_a(z) = \dfrac{a}{\overline{z}} \end{array}$$

1. Cette application est-elle bijective ? Déterminer suivant les valeurs de a, les points invariants par φ_a .
2. Démontrer que $\varphi_a \circ \varphi_a$ est la restriction à $\mathscr{P}^*$ d'une isométrie dont on déterminera la nature et les éléments remarquables en fonction de l'argument de a .
   Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier a pour que φ_a soit involutive ?

B- Dans cette partie, a est un réel strictement positif.

1. En utilisant la première partie, répondre aux questions suivantes :
   φ_a est-elle bijective ? Quel est l'ensemble des points invariants ? Est-elle involutive ?
2. M' étant l'image de M par φ_a , calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M , puis les coordonnées x et y de M en fonction de x' et y' . z' étant l'affixe de M' , on pose $z' = [r';\theta']$; calculer r' et θ' en fonction de r et θ où $z = [r;\theta]$ est l'affixe de M .

Retour page 1

3. Montrer que les points O M et M' sont alignés .
   Soit D une droite passant par O ; déterminer l'image de D privée de O par φ_a .
4. Soit C un cercle passant par O et centré sur l'axe des abscisses en un point d'abscisse c . Déterminer l'image par φ_a du cercle C privé de O . En déduire l'image par φ_a d'une droite parallèle àl'axe des ordonnées et distincte de celui-ci .

C- Soit H la coube d'équation $x^2 - y^2 + 2x = 0$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on indiquera centre, axes de symétrie, sommets, foyers et asymptotes. Dessiner H en prenant $4cm$ pour unité sur chacun des deux axes.
2. Montrer que $\mathscr{H}$ est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r, \theta]$ tels que :
$$r = f(\theta) \quad \text{et} \quad f(\theta) = \frac{-2\cos(\theta)}{\cos(2\theta)} \quad \theta \in [0; 2\pi]$$
   En étudiant le signe de $f(\theta)$ suivant les valeurs de θ , vérifier que H se trouve située dans trois régions du plan limitées par des demi-droites d'origine O ; sur la figure, on hachurera les autres régions .
3. Á partir de cette question on suppose que $a = 1$. Soit Γ^* l'image de $\mathscr{H}$ privée de O et on pose $\Gamma = \Gamma \cup \{O\}$.
   Montrer que Γ est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r, \theta]$ tel que $r = g(\theta) \quad \theta \in [0; 2\pi]$; calculer $g(\theta)$.
4. Montrer que Γ se trouve dans les mêmes régions que celles définies au (2) et qui contiennent H. Montrer que Γ admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie .
   Placer les points invariants de H et calculer leurs coordonnées .
5. Soit A le point de H appartenant à l'axes des abscisses et dont l'abscisse est strictement négative. Déterminer $A' = \varphi_1(A)$. Soit Δ la tangente à A en H.
   Déterminer l'image Δ' de Δ par φ_1 et construire Δ' .
6. Montrer qu'une équation cartésienne de Γ est $y^2 = x^2 \dfrac{1+2x}{1-2x}$. Soit Γ_1 l'ensemble des points du plan de coordonnées x et y telles que :
$$y = x\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$
   En étudiant la fonction $F : x \longrightarrow x\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ et en utilisant les questions précédentes, construire Γ_1 sur le même graphique que $\mathscr{H}$, puis en déduire Γ.
7. Préciser les tangentes en O et en A' à Γ_1. Vérifier que Γ et Δ' ont la même tangente en A' .

Chapitre 23

1983.

Sommaire

I. Aix-Marseille, série C

Ex. 464. ./1983/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

1. Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z-1| = |\overline{z}+1|$? Expliquer géométriquement le résultat trouvé, en considérant un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et en associant à tout point $M(x\ ;\ y)$ du plan son affixe z, c'est à dire le nombre complexe défini par $z = x + \mathrm{i}y$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $(z-1)^n = (\overline{z}+1)^n$.

Ex. 465. ./1983/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

1. Étudier la fonction f (variations et limites) ; tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :
$$g(x) = 1 + x + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k$$
et
$$S_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}.$$
Pour $x \neq 1$, justifier que $g(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. En déduire, par dérivation pour $x \neq 1$, une expression de $S_n(x)$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose
$$s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$
Déterminer une expression de s_n. Quelle est la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$?

Ex. 466. ./1983/aixmarseilleC/exo-3/texte.tex

La seconde partie est indépendante de la première ; et dans la première partie B ne dépend pas de A.

Dans tout le problème, E est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont les axes sont notés Ox, Oy et Oz.

Partie I.

On note Ω et $\overline{\Omega}$ les points de coordonnées respectives $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $(0\ ;\ 0\ ;\ -1)$. On dira qu'une isométrie laisse **invariant** un sous ensemble G de E si et seulement si $f(G) = G$.

A. 1. Soit f une isométrie affine de E vérifiant $f(O) = O$ et laissant la droite Oz invariante. On note $\vec{f}$ l'endormorphisme associé.

a) Établir que $f(\Omega)$ est égal à Ω ou $\overline{\Omega}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\vec{f}(\vec{k})$?
Montrer que $\vec{F}(\vec{i})$ et $\vec{f}(\vec{j})$ sont orthogonaux à $\vec{k}$

b) Soit M un point de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, soit $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ les coordonnées du point M' image de M par f. Montrer que $z'^2 = z^2$. Puis en déduire que

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2.$$

A. 2. Quels sont les déplacements f de E vérifiant $f(O) = O$ et qui laissent la droite Oz invariante ?

B.
Dans toute la suite du problème, on note Γ le sous ensemble de E défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

B. 1) a) Étudier l'intersection de Γ avec le plan d'équation $x = 0$. Faire une figure.

b) Pour tout λ réel, on note P_λ le plan d'équation $z = \lambda$. Donner une équation de $P_\lambda \cap \Gamma$ dans le repère $(\omega_\lambda\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ où ω_λ est le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ \lambda)$.
Quelle est la nature de $P\lambda \cap \Gamma$ lorsque $\lambda \neq 0$?
Préciser $P_0 \cap \Gamma$.

B. 2) a) Soit A un point quelconque de Γ, distinct de O. Montrer que la droite (OA) est incluse dans Γ.

b) Soit Δ un droite incluse dans Γ. Montrer que Δ passe par O. (*On pourra étudier l'intersection de Δ et P_0*).

C. 1. Soit f une isométrie affine de E vérifiant $f(O) = O$ et laissant globalement invariante la droite Oz. Déduire des résultats de la question 462 que $f(\Gamma) = \Gamma$;
Dans la question suivante, on va établir qu'il s'agit là des seules isométries laissant Γ invariant.

C. 2. Soit, maintenant, f une isométrie de E vérifiant $f(\Gamma) = \Gamma$.

a) Établir que $f(O) = O$. (*On pourra considérer deux droites distinctes incluses dans* Γ.)

b) Soit M un point de Γ, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$. Quelle est en fonction de zs seulement, la distance de M à O ?
Soit S la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. Vérifier que $S \cap \Gamma$ est l'union deux deux cercles dont on précisera les plans les contenant, les rayons et les centres.

c) Montrer que $f(S \cap \Gamma) = S \cap \Gamma$; en déduire que $f(\Omega)$ est égal à Ω ou $\overline{\Omega}$. Que peut-on en conclure pour l'image de la droite Oz par f ?

Partie II.
On considère la plan Π d'équation $y + z\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

1. Déterminer les points B et C d'intersection de Π avec, respectivement Oy et Oz.
   On définit $\vec{u}$ par : $\overrightarrow{BC} = BC\vec{u}$, où BC est la distance de B à C.
   Calculer les coordonnées de $\vec{u}$. Vérifier que $(B,\ \vec{i},\ \vec{u})$ est un repère orthonormé de Π.
2. Soit M un point quelconque de Π, de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ dans le repère $(B,\ \vec{i},\ \vec{u})$.
   Montrer que les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de M dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de E sont données par :

$$x = X \qquad y = \sqrt{3} - Y\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z = \frac{Y}{2}.$$

3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan Π dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de E vérifient $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
   Trouver une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ dans le repère $(B,\ \vec{i},\ \vec{u})$ de Π.
   Quelle est la nature de $\mathscr{E}$?
   Le plan Π étant pris comme plan de feuille, tracer $\mathscr{E}$.

4. On considère l'application g de E dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{2} \\ y' = y\sqrt{3} + z \\ z' = y + z\sqrt{3}. \end{cases}$$

Comparer $x'^2 + y'^2 - z'^2$ et $x^2 + y^2 - z^2$. Quelle est l'image de Π par g ?

Si vous avez traité la première partie, commentez éventuellement brièvement.

II. Amiens Rouen, série C

Ex. 467. ./1983/amiensC/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos 3x . \cos^3 x.$$

1° Étudier les variations de la fonction f et construire se courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (On prendra 3 cm comme unité).

2° Montrer que, quel que soit le réel x, on a :

$$f(x) = a\cos 6x + b\cos 4x + c\cos 2x + d,$$

où a, b, c, d sont quatre réels que l'on déterminera.

3° Calculer, en cm^2, l'aire de l'ensemble E limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Ex. 468. ./1983/amiensC/exo-2/texte.tex

Texte partiel

Les suites $(U) = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels sont définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_1 = 31 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 = -1 \\ V_1 = -11 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n \end{cases}$$

Les suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = U_n + V_n \quad \text{et} \quad Y_n = U_n - V_n.$$

1° Calculer X_0 et X_1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite X est une suite géométrique de raison 5.

2° Montrer de même que la suite Y est une suite géométrique.

3° Calculer X_n et Y_n en fonction de n ; en déduire le calcul de U_n et V_n en fonction de n.

III. Besançon, série C

Ex. 469. ./1983/besançonC/exo-2/texte.tex

Un plongeur de restaurant lave 30 verres, 10 de chaque type A, B, C. Au cours de la vaisselle, deux verres sont cassés. On admet que le hasard seul est responsable de la casse. On suppose ainsi qu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires.

1° Construire l'espace probabilisé correspondant à la situation.

2° a) Quelle est la probabilité que les deux verres cassés soient du même type ?

b) Quelle est la probabilité de casser au moins un verre de type A ?

c) Quelle est la probabilité de casser un verre de type B et un verre de type C ?

3° Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de verres de type A cassés.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Trouver l'espérance mathématique $E(x)$ et la variance $V(X)$ de cette variable aléatoire.

IV. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy Metz, Nantes, Reims, Strasbourg, série E

✻ Ex. 470. ./1983/besançonE/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe P, on considère l'application s définie par :

$$z' = (-3+4\mathrm{i})\overline{z} + 4 - 10\mathrm{i}.$$

1° Démontrer que s possède un point invariant Ω que l'on déterminera.

2° Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport 5. Démontrer qu'il existe une application σ telle que :

$$s = h \circ \sigma = \sigma \circ h.$$

Définir l'application σ ; préciser ses éléments caractéristiques.

✻ Ex. 471. ./1983/besançonE/exo-2/texte.tex

On considère la fonction f de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad f(x) = x + \ln|x|.$$

1° Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé$\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

2° Calculer l'aire du domaine :

$$D = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \quad -2 \leqslant x \leqslant -1, \quad x \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$

3° Soit S la symétrie du plan (P), par rapport à la droite $(O,\ \vec{\jmath})$ de direction δ droite vectorielle dirigée par la vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Démontrer que la courbe (C) est globalement invariante par S.

☆Problème 133 ./1983/besançonE/pb/texte

Les parties A et B du problème sont largement indépendantes.

A. On se propose de dégager un méthode permettant de trouver une valeur approchée de l'équation $\mathrm{e}^x - 2 = x$.

1° Etudier les variations de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - 2 - x.$$

En déduire que l'équation $\mathrm{e}^x - 2 = x$ admet une unique solution, notée ω, sur $I =]-\infty\,;-\ln 2]$. (ln désignant le logarithme népérien). Vérifier que ω appartient à $]-2\,;-1[$.

2° Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - 2$.

a) Montrer que :

$$\forall x \in I \quad \mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\forall x \in I \quad f(x) \in I.$$

b) Montrer que :

$$\forall (x,\ y) \in I \times I, \quad \text{et} \quad x \geqslant y, \quad \int_y^x \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} \int_y^x \mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$\forall (x,\ y) \in I \times I, \quad \left| f(x) - f(y) \right| \leqslant \frac{1}{2} \left| x - y \right|.$$

3° x_0 désignant un élément de I, on considère la suite (x_n) définie par son premier terme x_0 et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - \omega| \leqslant \frac{1}{2^n} |x_0 - \omega|.$$

En déduire la limite de la suite (x_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

4° On choisit $x_0 = -1$; déterminer le plus petit entier n tel que $|x_n - \omega| \leqslant 10^{-2}$.

B. Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et P un plan affine euclidien ; $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormé de P.

Soit f l'application affine de P dans P qui, à tout point M de coordonnées xy dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, associe le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5}{12}x - \dfrac{1}{12}y + 1 \\ y' = -\dfrac{1}{12}x + \dfrac{5}{12}y + 3. \end{cases}$$

1° Calculer les coordonnées de Ω, point invariant de f.

2° Soit φ l'endomorphisme associé à f. Montrer que $D_1 = \left\{ \vec{u} \in \vec{P} \,\middle|\, \varphi(\vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} \right\}$ est une droite vectorielle dont on précisera une base $\vec{I}$ de norme 1.

Montrer que $D_2 = \left\{ \vec{u} \in \vec{P} \,\middle|\, \varphi(\vec{u}) = \frac{1}{3}\vec{u} \right\}$ est une droite vectorielle dont on précisera une base $\vec{J}$ de norme 1.

3° a) Montrer que $(\vec{I},\ \vec{J})$ est une base orthonormée de $\vec{P}$.

b) Soit $\vec{w} = X\vec{I} + Y\vec{J}$. Calculer les coordonnées de $\varphi(\vec{w})$ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$. En déduire que :

$$\forall \vec{w} \in \vec{P}, \qquad \|\varphi(\vec{w})\| \leqslant \frac{1}{2} \|\vec{w}\|.$$

4° On se donne un point M_0 et on définit les points M_n par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = f(M_n)$.

On appelle $(x_n\ ;\ y_n)$ les coordonnées de M_n dans la repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\|\overrightarrow{M_n\Omega}\right\| \leqslant \frac{1}{2^n} \left\|\overrightarrow{M_0\Omega}\right\|.$$

(Ω est le point fixe défini en B1).

b) Quelle est la limite de la suite $\left(\left\|\overrightarrow{M_n\Omega}\right\|\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

En déduire les limites des suites (x_n) et (y_n).

V. Dijon, Série C

Ex. 472. ./1983/dijonC/exo-2/texte.tex

$\mathscr{E}$ est une espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On note E l'espace vectoriel associé à $\mathscr{E}$.
Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$, qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ associe le point M' dont les coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ sont :

$$\begin{cases} x' &= x + a \quad (a \text{ étant un réel quelconque}) \\ y' &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z + 1 \\ z' &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z + 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

1° Montrer que l'endormorphisme φ associé à f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.

2° Discuter, suivant les valeurs de a, la nature de f ; on précisera dans chaque cas les éléments caractéristiques de f.

VI. Groupe I, série C

Ex. 473. ./1983/groupeIC/exo-1/texte.tex

Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3, on donne deux points fixes A et B.
Déterminer l'ensemble (S) des couples $(P,\ Q)$ de $\mathscr{E}^2$ qui vérifient les deux conditions :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \vec{Q} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = 0.$$

VII. Lyon, série C

Ex. 474. ./1983/lyonC/exo-2/texte.tex

1° E est un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
D est la droite vectorielle de base : $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. R est la symétrie d'axe D. (R est aussi appelé demi-tour d'axe D).
Exprimer dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, les vecteurs $R(\vec{i})$, $R(\vec{j})$, $R(\vec{k})$. (On pourra utiliser les images par R de vecteurs orthogonaux à D).

2° $\mathscr{E}$ est un espace affine associé à E rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans laquelle un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ a pour image $M'(x'\,;\,y'\,;\,z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + 1 \\ y' = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y - \dfrac{2}{3}z + 4 \\ z' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z + 2 \end{cases}$$

Reconnaître la nature de f et donner ses éléments caractéristiques. (On pourra rechercher les points M tel que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit parallèle à D).

VIII. Pondichery, série C

✻ Ex. 475. ./1983/pondicheryC/exo-1/texte.tex

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4\cos^3 x - 3\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$.

✻ Ex. 476. ./1983/pondicheryC/exo-2/texte.tex

Une personne compose au hasard un numéro de téléphone à 6 chiffres (un cadran téléphone comporte les dix chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0).

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) la personne compose le numéro $11-03-50$.
   b) La personne compose un numéro dont les chiffres sont tous distincts.
   c) La personne compose un numéro dont les chiffres constituent une suite strictement croissante (par exemple, le $03-47-89$).
2. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de chiffres 0 utilisés dans le numéro composé par cette personne.
   déterminer la loi de probabilité de X.

IX. Reims, série C

✻ Ex. 477. ./1983/reimsC/exo-1/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application T de P dans P qui, à chaque point M d'affixe z, associe la point M' d'affixe z' $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 2 + 2\mathrm{i}$.

2° Soit H le milieu du segment $[MM']$. Exprimer l'affixe de H en fonction de l'affixe z de M et de $\overline{z}$; en déduire, toujours en fonction de z et $\overline{z}$, la distance de M à H.

3° Préciser la nature et les caractéristiques géométriques de l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie :

$$|z+1+\mathrm{i}| = \frac{1}{2}|z+\mathrm{i}\overline{z}-2-2\mathrm{i}|.$$

✻ Ex. 478. ./1983/reimsC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, on donne le triangle ABC rectangle en A et isocèle avec $AB = AC = a$, où a est un réel donné strictement positif.

1° a) Déterminer et construire la barycentre G du système $\{(A,\ 4)(B,\ -1)(C,1)\}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2a^2.$$

2° $\mathscr{P}$ est le plan vectoriel associé à P.

a) Soit $\vec{f}: \begin{array}{rcl} P & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \end{array}$.

Montrer que $\vec{f}$ est une fonction constante que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

Retour page 1

✰Problème 134

./1983/reimsC/pb/texte

I. Étant donné un entier $\geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

et on considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}.$$

1. Montrer que $f(x)$ est la somme des $2n$ premiers termes d'un suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Dire pourquoi $f(x)$ est intégrale sur $[0\,;1]$ et montrer que
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = u_n.$$
3. Vérifier que, pour $x \neq -1$, $f(x) + \dfrac{x^{2n}}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$.
4. En déduire que
$$u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$
5. Montrer que
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x.$$
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

II. On considère les fonctions numériques F, G, H définies sur $[0\,;1]$ par :

$$F(x) = \ln(1+x), \quad G(x) = x - F(x), \quad H(x) = F(x) - x + x^2.$$

1. Étudier
2.
3.
4.
5.
6.

III. On considère la fonction numérique S définie sur $[0\,;1]$ par $S(x) = \sin(x)$ et la suite

$$w_n = S\left(\frac{1}{n}\right) + S\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + S\left(\frac{1}{2n}\right) \quad \text{(définie pour tout entier } \geqslant 1).$$

a) Montrer que $x - x^2 \leqslant S(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Chapitre 24

1984

Sommaire

I. Aix-Marseille, série C

Ex. 479. *4 points.* ./1984/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E.
On désigne par :

- ▷ R_1 la rotation d'axe Oz orienté par $\vec{k}$, et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
- ▷ R_2 la rotation d'axe Oz orienté par $\vec{k}$, et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.
- ▷ T_1 la translation de vecteur $\left(\dfrac{1}{2}\vec{k}\right)$.
- ▷ T_2 la translation de vecteur $\left(-2\vec{k}\right)$.

On considère les vissages : $V_1=R_1\circ T_1 = T_1\circ R_1$ et $V_2=R_2\circ T_2 = T_2\circ R_2$.

1° Étant donné un point M quelconque de E, calculer en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de M les coordonnées des points suivants :

$$V_1(M),\ V_2(M),\ V_1\circ V_2(M),\ V_2\circ V_1(M).$$

2° Caractériser les transformations $V_1\circ V_2$ et $V_2\circ V_1$, et expliquer sans calculs les résultats obtenus.

Ex. 480. *4 points.* ./1984/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Dans le plan P muni du repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on définit les trois points :

$$A(1\ ;\ 0)\ ;\ B(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{2})\ ;\ C(\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2})$$

et la droite C dont une équation est : $x = 1$.

1° Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $(A,\ B,\ G,\ C)$?

2° On note (Γ) l'ensemble des points M de P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, qui vérifient la relation :

$$-MA^2+MB^2+MC^2 = 2(x-1)^2.$$

a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ).

b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de P tels que :

$$MG = \sqrt{2}d(M,\ \text{D}),$$

où $d(M,\ \text{D})$ désigne la distance de M à la droite D.

c) En déduire la nature de (Γ) et préciser ses éléments remarquables. Représenter (Γ) dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

✰Problème 135 *12 points.*

./1984/aixmarseilleC/pb/texte

N.B. : Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie A pour aborder la suite.

Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; les points de P sont repérés, soit par leurs coordonnées $(x\ ;\ y)$, soit par leur affixe $x + \mathrm{i}y$.

Le but du problème est l'étude de l'ensemble (Γ) des points $M(t)$, $t \in \mathbb{R}$, du plan P, de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ telles que :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t \cos t \\ y(t) = \mathrm{e}^t \sin t. \end{cases}$$

A) 1. a) Vérifier, pour tout réel t, les relations :

$$\cos t - \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Étudier les variations des fonctions $x : t \longmapsto x(t)$ et $y : t \longmapsto y(t)$ sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Tracer dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la portion de (Γ), ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. (on aura soin, en particulier, des représenter les points $M(0)$, $M(\pi/4)$, $M(\pi/2)$ et les tangentes à (Γ) en ces points.)

2. Calculer, pour tout réel t :

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}\right).$$

En déduire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}\right)$ est constant et en donner une mesure.

3. On pose, pour tout réel a et b, $\mathrm{L}_a^b = \displaystyle\int_a^b \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t$.

Donner l'expression $\mathrm{L}_0^{\frac{\pi}{2}}$ et en calculer une valeur approchée à 10^{-2} près.

Étudier la limite éventuelle de L_t^0 lorsque t tend vers $-\infty$.

B) 1. Montrer que les fonctions x et y sont des solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients constants.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $X'' - 2X' + 2X = 0$.

C) 1. Pout tout réel t, on note f_t l'application de P dans P qui, au point M d'affixe Z fait correspondre le point M_1 d'affixe Z_1 telle que $Z_1 = z(t)Z$, où $z(t)$ est l'affixe du point $M(t)$ défini dans la partie A.

a) Préciser la nature de f_t et ses éléments remarquables.

b) Montrer que, pour tout t et t' réels, $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$.

Soit G l'ensemble des applications f_t, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif des transformations du plan P.

2. a) Montrer que, pour tout t et t_1 réels, $f_t(M(t_1)) = M(t + t_1)$. En déduire que, pour tout réel t, $f_t(\Gamma) = (\Gamma)$.

b) Montrer que, si $M_1 = M(t_1)$ est un point quelconque de (Γ), l'ensemble : $\{f_t(M_1),\ t \in \mathbb{R}\}$ est égal à (Γ).

D) Soit t un réel fixé non nul. On note A_0 le point $M(0)$ et on définit les points $A_n (n \in \mathbb{N}^\star)$ par la relation de récurrence :

$$A_n = f_t(A_{n-1}) \qquad \text{si} \qquad n \geqslant 1.$$

1. a) Calculer en fonction de t la longueur A_0A_1.

b) Montrer que la suite $(A_{n-1}A_n)$ des longueurs $A_{n-1}A_n$ est une suite géométrique.

c) En déduire une expression de :

$$L_n(t) = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n \quad \text{en fonction de } n \text{ et } t.$$

2. On suppose $t < 0$. Montrer l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(t)$ et calculer sa valeur $L(t)$.

   Montrer que $\dfrac{e^{2t} - 2e^t \cos t + 1}{(1-e^t)^2} = 1 + 2e^t \dfrac{1-\cos t}{(1-e^t)^2}$.

   En déduire la limite $L(t)$ lorsque t tend vers zéro par valeurs négatives. Comparer ce résultat à la limite de L_t^0 trouver au A3.

II. Amiens, série C

✼ Ex. 481. ———— *5 points* *./1984/amiensC/exo-1/texte.tex*

Soit $z_0 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

   a) Montrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de

   $$X^2 + X - 1 = 0. \tag{24.1}$$

   b) Déterminer α en fonction de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

   c) Résoudre l'équation (24.1) et en déduire la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

2. On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4 dans le plan affine rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

   a) Soit H le point d'intersection de la droite A_1A_4 avec l'axe $(O, \vec{u})$. Montrer que $\overline{OH} = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.

   b) $\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω d'affixe $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ passant par B d'affixe (i).

   Ce cercle coupe l'axe $(O, \vec{u})$ en M et N. (On appellera M le point d'abscisse positive). Montrer que $\overline{OM} = \alpha$, $\overline{ON} = \beta$ et que H est le milieu de $[OM]$.

   c) En déduire une construction simple du pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

III. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims et Strasbourg, série C

✼ Ex. 482. ———— *4 points.* *./1984/besançonC/exo-1/texte.tex*

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^1 e^{tx^2}\,\mathrm{d}t.$$

1° Calculer $F(x)$ pour $x \neq 0$ et $F(0)$. Démontrer que F est continue en 0.

2° Écrire un développement limité de à l'ordre 2 de e^x au voisinage de 0.
En déduire un développement limité à l'ordre 2 de $F(x)$ au voisinage de 0. Démontrer alors que : $F'(0) = 0$.

3° Démontrer que : si $0 \leqslant x \leqslant x'$ alors $F(x) \leqslant F(x')$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$$

4° Donner, en tenant compte des résultats précédents, l'allure du graphe de F.

IV. Lille, série C & E

✻ Ex. 483. ———— *4 points.* *./1984/lilleCE/exo-1/texte.tex*

Soit, dans le plan affine euclidien P, un carré ABCD, de côté de longueur c, où $c \in \mathbb{R}_+^\star$.
On considère un réel α et f_α l'application du plan dans lui-même

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathrm{P} &\longrightarrow \mathrm{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}.$$

a) Déterminer, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de f_α.

b) Déterminer, puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2.$$

c) Déterminer, puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|.$$

d) Déterminer, puis construire l'ensemble E_3 des points M du plan P tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 2c^2.$$

✻ Ex. 484. ———— *4 points.* *./1984/lilleCE/exo-2/texte.tex*

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$2z^3 - (7+2\mathrm{i})z^2 + (11+\mathrm{i})z - 4 = 0. \qquad \text{(E)}$$

1° Montrer que cette équation admet une solution réelle unique a ; la déterminer.

2° Résoudre l'équation (E) et représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct, les images A, B, C des solutions.
A désigne l'image de la racine réelle et C l'image de la racine qui a le plus grand module.

3° I étant le point du plan d'affixe i, montrer qu'il existe une similitude de centre I qui transforme A en C.
Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

V. Paris, série C

✻ Ex. 485. ———— *4 points.* *./1984/parisC/exo-1/texte.tex*

Le plan P est rapporté au repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application affine f qui à tout point M de P, de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées x' et y' données par :

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = -2x + 4y - 1. \end{cases}$$

1° Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2° Montrer que l'image de P par f est une droite D.

3° Montrer que $f = h \circ p$, où h est une homothétie qu'on déterminera et p la projection orthogonale sur la droite D.

✻ Ex. 486. ———— *4 points.* ./1984/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan, rapporté au repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère la courbe (C_m) d'équation

$$mx^2 + y^2 - 2x = 0.$$

1° Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe (C_m).

2° Tracer les courbes (C_0) et (C_2) sur une même figure. L'unité de longueur est 4 cm.

✫Problème 136 *12 points.* ./1984/parisC/pb/texte

Le symbole ln désigne la fonction logarithme népérien.

Les courbes de la partie **??** sont à construire dans le plan muni rapporté au *même* repère othonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité de longueur est 2 cm.

I 1° A tout réel x, tel que $\cos x \neq 0$, on associe :

$$f(x) = -\ln|\cos x|.$$

a) Étudier la fonction f ainsi définie.

b) Construire la courbe représentative de f, notée $(\mathscr{C})$.

2° On note S l'ensemble des solutions de l'équation

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0. \end{cases}$$

a) Résoudre cette équation.

b) On considère la fonction

$$g = \begin{pmatrix} \mathbb{R} - \{S\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\ln\left|\cos x + \sqrt{3}\sin x\right| \end{pmatrix}$$

Montrer que (Γ), courbe représentative de g, est l'image de $(\mathscr{C})$ par une application affine que l'on caractérisera.

3° On note $\widetilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que $\widetilde{f}$ admet une fonction réciproque, notée $\widetilde{f}^{-1}$. Calculer $\widetilde{f}^{-1}(\ln\sqrt{2})$.

b) Étudier la dérivabilité de $\widetilde{f}^{-1}$. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, on a :

$$\left(\widetilde{f}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}}.$$

c) Dessiner la courbe représentative de $\widetilde{f}^{-1}$, notée (C).

4° La suite u est définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = f(u_{n-1}).$$

a) Montrer que l'équation

$$\begin{cases} x \in \left]\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(x) = x \end{cases}$$

admet une unique solution, notée ℓ. Donner un encadrement de ℓ dans un intervalle de longueur 10^{-2}.

b) Montrer, par récurrence, que tous les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$. Montrer que u est décroissante.

c) Montrer que u est convergente et trouver sa limite.

Retour page 1

II On considère la fonction G, définie sur $\mathbb{R}+^{\star}$ par

$$G(x) = \int_{\ln\sqrt{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}-1}}.$$

1° Montrer qu'il existe un réel k, que l'on calculera, tel que pour tout réel strictement positif, on ait

$$G(x) = \widetilde{f}^{-1}(x) + k.$$

2° Montrer que G admet une limite en $+\infty$ et une limite en 0. Calculer ses limites.

III 1° a) α est un nombre réel, résoudre l'équation

$$(\mathscr{E}_{\alpha,\,1}) \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation

$$(\mathscr{E}_{\alpha,\,n}) \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0, \end{cases}$$

dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.

2° Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel α et pour tout complexe z, on pose

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1.$$

On admet que, pour tous z, α et n, on a :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2z\cos\alpha + 1\right) \times \cdots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right] \times \cdots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right]$$

et on note

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$$

a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

b) Pour tout α de l'intervalle $[0\,;\pi[$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Montrer que, pour tout α non nul, on a

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}.$$

c) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$, lorsque α tend vers 0 ?

d) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Retour page 1

VI. Poitiers, série C

✻ Ex. 487.

./1984/poitiersC/exo-1/texte.tex

θ désigne un nombre réel appartenant à $[0\,;2\pi[$.

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0.$$

Donner chaque solution sous forme trigonométrique.

2° Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral.

✻ Ex. 488.

./1984/poitiersC/exo-2/texte.tex

Bac C, juin 1984, Poitiers.
Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère trois points A, B et C tels que :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=4d,\quad \text{et}\quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\|=2d,$$

où d est un réel strictement positif donné.
On considère les points A, B et C affectés respectivement des coefficients λ, 1 et 1 où $\lambda\in\mathbb{R}-\{-2\}$.

1° Déterminer l'ensemble Δ des barycentres G_λ de ces points quand λ décrit $\mathbb{R}-\{-2\}$.

2° Dans le cas où $\lambda=-1$, on appelle G le barycentre des points affectés respectivement des coefficients -1, 1 et 1.

a) Déterminer G.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2.$$

3° a) Démontrer que pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

b) Déterminer l'ensemble Δ' des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2=32d^2.$$

☆Problème 137

./1984/poitiersC/pb/pb

On considère l'application f de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$\forall x\in]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[,\quad f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\quad \text{et } f(0)=1.$$

$\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie -A-

1° Étudier la continuité de f sur $]-1\,;+\infty[$.

2° Étudier la dérivabilité de f sur $]-1\,;+\infty[$.
Expliciter la fonction dérivée f'.

3° a) On note g l'application de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(1+x).$$

Étudier les variations de g et le signe de $g(x)$. (On ne demande pas l'étude de la limite de g pour $x=-1$)

b) En déduire les variations de f.

4° Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

5° Construire la courbe $\mathscr{C}$.
Préciser les droites asymptotes et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

6° Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 e étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente (on étudiera les variations de l'application h de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2\left(\frac{1}{2} + f'(x)\right)$, puis le signe de $h(x)$).

Partie -B-

1° Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ℓ de l'intervalle $]0\,;1[$ tel que $f(\ell) = \ell$. (On pourra considérer la fonction $k(x) = f(x) - x$ sur $[0\,;1]$. On ne demande pas de calculer ℓ).

2° On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0\,;1[$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$. (On remarquera que $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell)$ et on utilisera le résultat : $\forall x \in [0\,;+\infty[, -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$)

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Partie -C-

1° a et b sont deux nombres réels de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ tels que $a < b$, établir les inégalités :

$$(b-a)f(b) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f(a).$$

En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan limitée par l'axes des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, en utilisant la subdivision $\left(0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1\right)$.

2° Trouver la limite de $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque t tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \frac{1}{x+1} - f(x) \leqslant 0$ que l'on déduira du signe de $f'(x)$.

3° a) Démontrer que : $\forall x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$,

$$0 < f(x) \leqslant -2\ln(x+1).$$

En déduire que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$ on a :

$$0 < \int_t^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x < 1 + \ln 2.$$

b) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(x)\mathrm{d}x$. Étudier la croissance de cette suite. Démontrer que cette suite est convergente.

Chapitre 25

1985.

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier & Nice ;

– groupe II : Amiens, Rennes, Rouen ;

– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims & Strasbourg ;

– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

Sommaire

I. Groupe I, série C

Ex. 489. ./1985/groupeIC/exo-1/texte.tex

Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties

$$I_k = \int_0^k x^2 e^{-x}\,dx.$$

Étudier la limite de I_k quand k tend vers $+\infty$.

Ex. 490. ./1985/groupeIC/exo-2/texte.tex

P est le plan orienté. On appelle « triangle équilatéral direct » tout triplet (A, B, C) de points de P vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{le triangle } ABC \text{ est équilatéral} \\ \dfrac{\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de l'angle } \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right). \end{cases}$$

On se donne un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R et une droite (D) ne coupant pas $(\mathscr{C})$.

1° Soit A un point de (D). On note (E_A) l'ensemble des points M de P vérifiant la propriété :
« il existe un point N de $(\mathscr{C})$ tel que le triplet (A, M, N) soit un triangle équilatéral direct ».
Montrer que (E_A) est un cercle dont on déterminera le centre Ω_A et le rayon R_A. Construire (E_A).

2° Quel est l'ensemble des points Ω_A lorsque A décrit (D) ? Construire cet ensemble.

☆Problème 138 ./1985/groupeIC/pb/texte

A) 1° Résoudre l'équation différentielle

$$X'' + 2X' + 2X = 0 \qquad (1)$$

où X représente une fonction numérique de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer Les solutions f et g de (1) vérifiant :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = -1$$
$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'(0) = 1$$

B) Soit f la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

1° Montrer que, pour tout réel t : $-\mathrm{e}^{-t} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Qu'en déduit-on quant à la position relative des courbes représentatives $\mathscr{C}, \Gamma, \Gamma'$ des fonctions

$$t \longmapsto f(t)\,; \qquad t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\,; \qquad t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}\ ?$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

2° Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; vérifier que, pour tout réel t :

$$f'(t) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

3° Déterminer les points communs à $\mathscr{C}$ et Γ, à $\mathscr{C}$ et Γ'.
Montrer qu'en ses points les tangentes aux deux courbes sont confondues.

4° Tracer les arcs des courbes $\mathscr{C}, \Gamma, \Gamma'$ correspondant à $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ dans un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisses ; 16 cm en ordonnées).

5° Soit g la fonction numérique de la variable réelle t définie par

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

Calculer $g(t)$ en fonction de $f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.
Déduire le tableau de variations de g sur $[0\,;\,2\pi]$ du tableau de variations de f obtenu en B2.

C) Le plan P est rapporté à un nouveau repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$, orthonormé (unité : 16 cm). A tout réel t on associe le point $M(t)$ d'affixe $z(t) = f(t) + \mathrm{i}g(t)$, et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de $\mathscr{S}$.

1° Pour tout entier naturel n, on note A_n le point $M\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Placer A_0, A_1, A_2, A_3 et la tangente en A_0 à $\mathscr{S}$.

b) Tracer l'arc $\wideparen{A_0A_3}$ de $\mathscr{S}$, correspondant aux réels $t \in \left[0\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.
Préciser les points de cet arc où les tangentes à $\mathscr{S}$ sont parallèles aux axes.

2° a) Déterminer, en fonction de t, le module et un argument de $z(t)$.

b) Prouver qu'il existe une similitude directe de centre O, dont on précisera les éléments, telle que, pour tout réel t : $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ soit l'image de $M(t)$.

c) Quelle est l'image de l'arc de courbe $\wideparen{A_nA_{n+1}}$ par cette similitude ?

3° On admet que tout arc $\wideparen{A_nA_{n+1}}$ a une longueur l_n, et qu'une similitude de rapport k transforme un arc de longueur l en un arc de longueur kl.

a) Calculer l_n en fonction de l_0 et de n ; en déduire la longueur L_n de $\wideparen{A_0A_n}$.

b) Étudier la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

4° On donne $l_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

Calculer l_0 ; en déduire la valeur de la limite obtenue en C(3)b).

II. Groupe II, série C

Ex. 491. ./1985/groupeIIC/exo-1/texte.tex

On désigne par $\mathbb{C}^\star$ le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ privé de zéro.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

pour tout z élément de $\mathbb{C}^\star$.

1° Calculer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction des module et argument de z.

2° Soit φ l'application du plan privé de l'origine O dans le plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.
Quelle est la nature de l'image par φ d'un cercle de centre O et de rayon R ?

Ex. 492. ./1985/groupeIIC/exo-2/texte.tex

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, au point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{x} - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1) \\ y' = y+1 \\ z' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z + \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}). \end{cases}$$

1° Montrer que f est une isométrie et déterminer l'ensemble des points invariants par ff.

2° a) Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par l'endomorphisme associé à f est une droite vectorielle dont on précisera une base $(\overrightarrow{U_0})$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{U_0}$ et calculer $\overrightarrow{Mf(M)}$ pour tout point M de $\mathscr{D}$.

3° a) Soit t la translation de vecteur $\vec{\jmath}$. Montrer que l'application $r = t^{-1} \circ f$ admet une droite de points invariants.

b) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $y = 0$ et A le point de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.
On rapporte $\mathscr{P}$ au repère $\mathscr{R} = (A,\ \vec{\imath},\ \vec{k})$.
Montrer que, pour tout point M de $\mathscr{P}$, $r(M)$ appartient à $\mathscr{P}$.
On note r' la restriction de r à $\mathscr{P}$. Pour M de coordonnées $(X\ ;\ Z)$ dans $\mathscr{R}$, déterminer les coordonnées $(X'\ ;\ Z')$ dans $\mathscr{R}$ de $r'(M)$ en fonction de X et Y.
Caractériser r' ; on supposera que le repère $\mathscr{R}$ est direct.

4° En déduire que f est un vissage dont on déterminera l'axe, le vecteur et le cosinus de l'angle

III. Groupe III, série C

Ex. 493. ./1985/groupeIIIC/exo-1/texte.tex

Soit $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan, A_0 le point d'affixe 6 et s la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ at d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
On pose $A_{n+1} = s(A_n)$ pour $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ 12$.

1° Déterminer en fonction de n l'affixe du point A_n et vérifier que A_{12} appartient à la demi-droite $(O,\ \vec{\imath})$.

2° Établir que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}. Représenter les points A_0, A_1, …, A_{12} (on ne demande pas de calculer explicitement leurs coordonnées) et tracer les segments OA_0, OA_1, …, OA_{12} et A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{11}A_{12}$.

3° Calculer la longueur du segment A_0A_1. En déduire la longueur ℓ de la ligne polygonale $A_0A_1A_2\ldots A_{12}$.
Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

✻ Ex. 494. ./1985/groupeIIIC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et soient A et B deux points diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$.

1° Pour tout point M de $\mathscr{C}$, distinct de A et B, on construit le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme.
Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment $[MQ]$, puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BMQ lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

2° On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM). Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ?
Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

3° On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP.

a) Pourquoi ces cercles ne sont-ils pas tangents en P ?

b) On note K l'autre point commun de ces deux cercles. En utilisant les angles orientés de droites égaux à $(\widehat{KB,\ KP})$ et $(\widehat{KP,\ KM})$, montrer que les points K, A, B, M sont cocycliques.

IV. Groupe IV, série C

✻ Ex. 495. ./1985/groupeIVC/exo-1/texte.tex

dans le plan orienté, on considère un triangle ABC.
A', B', C' désignent les milieux respectifs des bipoints $(B,\ C)$, $(C,\ A)$, $(A,\ B)$.

1° Montrer qu'il existe un point P et un seul vérifiant les propriétés suivantes $PA = PC$ et un mesure de l'angle en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PC}}\right)$ est égale à $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$.
Soit Q le point tel que :
$QA = QB$ et un mesure de l'angle en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{QB};\overrightarrow{PA}}\right)$ est égale à $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$.

a) *i.* On désigne par :

- r_P la rotation de centre P et d'angle de mse

✻ Ex. 496. ./1985/groupeIVC/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z, z^2, z^3 où z désigne un nombre complexe.

1° Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points M_1, M_2, M_3 soient deux à deux distincts.

2° On suppose les points M_1, M_2, M_3 deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des points M_1 tels que l'un des angles du triangle $M_1M_2M_3$ soit un angle droit.

V. Lille, série C

✻ Ex. 497. ./1985/lilleC/exo-1/texte.tex

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

1° Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.
Quel est l'ensemble de définition de f ?
Montrer que f est strictement décroissante sur $]-1 ; +\infty[$.

2° Montrer que, pour tout entier k au moins égal à 2, on a

$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire une minoration de u_n par une intégrale.

3° Calculer $\displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x = I_n$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. La suite (u_n) a-t-elle une limite quand n tend vers $+\infty$?

VI. La réunion, série E

✻ Ex. 498. ./1985/reunionE/exo-1/texte.tex

$ABCD$ désigne un rectangle d'un plan euclidien orienté.
On donne $AD = BC = a$ et $AB = CD = 2a$.L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ mesure $\frac{\pi}{2}$.
O est le point d'intersection des diagonales du rectangle.
Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1° Dessiner le rectangle $ABCD$ et son image $A'B'C'D'$ par l'application $f = t \circ r$. (On prendra $a = 4$ cm.)

2° Expliquer pourquoi f est une rotation. Déterminer son angle. Donner une construction de son centre Ω.

Remarque : *ce point Ω est utilisé par les ébénistes lorsqu'ils construisent une table rectangulaire que l'on peut faire pivoter autour de Ω puis déplier pour en doubler la surface, la table restant centrée sur son rectangle d'assiette.*

Chapitre 26

1986.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

– groupe II : Amiens & Rouen ;

– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

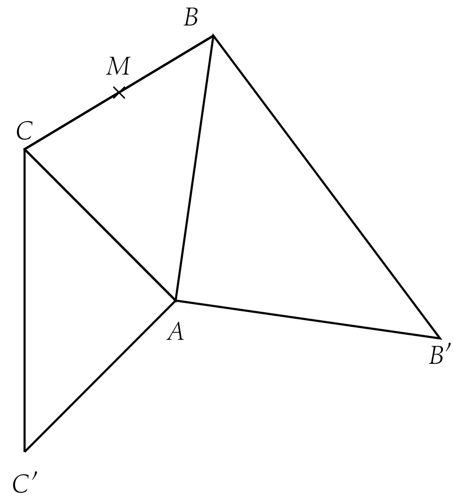
– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

I. Groupe I, série C

Ex. 499. *6 points* *./1986/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Le triangle ABC est quelconque, M est le milieu du segment $[BC]$.
Les triangles BAB' et $CC'A$ sont rectangles et isocèles directs de sommet A.
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que

$$B'C' = 2AM.$$



1. **Méthode géométrique**

 a) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminer les images des points A et M par h.
 Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C'.

 b) En déduire que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.

2. **Utilisation des nombres complexes** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lesquels B et C ont pour affixes respectives b et c.
   a) Calculer les affixes m, b' et c' des points M, B' et C'.
   b) Retrouver alors les résultats de la question 1b.

✲ Ex. 500. ———— *4 points.* *./1986/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

On donne dans le plan deux points fixes F et A. On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1° a) Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E ?
   b) Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse E appartenant à D.

2° a) Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E ; montrer que B appartient à une parabole P de foyer F dont un déterminera la directrice Δ.
   b) Déterminer la partie de P qui est l'ensemble des points B.

✩Problème 139

./1986/aixmarseilleC/pb/texte

I 1° Étudier la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$.

Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'x$, $y'y$.

2° Pour tout x réel on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.

b) Montrer que F est impaire.

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Déduire de cette inégalité que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3° x étant un réel quelconque, on pose

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier l'affirmation suivante :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^\star\ :\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x}.$$

c) Déduire de I(3)a) et I(3)b) que l'on peut affirmer :
   pour tout x de $\mathbb{R}$: $G(x) \leqslant \ln 2$.
   (On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale).

d) Déduire de I(3)a) et I(3)c) que l'on peut affirmer l'existence d'un réel L, limite quand x tend vers $+\infty$ de $G(x)$.

e) Montrer que G est une fonction impaire.

f) Déduire de I(3)d) et I(3)e) que $G(x)$ tend vers une limite quand x tend vers $-\infty$. Exprimer cette limite en fonction de L.

II On considère la fonction φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \end{array} \right..$$

Retour page 1

1° a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ.

b) Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions F et φ sont égales.

c) Déduire de II(1)b) une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au I3. ci-dessus) et la valeur du réel L de la question I(3)d).

2° On s'intéresse à la courbe représentative Γ de la fonction F dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a) Montrer que, pour x strictement positif, on peut écrire :

$$F(x) = \ln 2x + \ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right].$$

(On rappelle que, par II(1)b) ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.)

b) Étudier les branches infinies de Γ. Reconnaître d'éventuelles asymptotes à Γ.

c) Étudier la position de Γ par rapport à sa tangente à l'origine.
(On pourra étudier la variation de $h : x \longmapsto F(x) - x$).

d) Tracer Γ.

3° En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par Γ, l'axe $x'x$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

III Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = F(u_n). \end{cases}$

1° Montrer par récurrence que tous les termes de (u_n) son strictement positifs.

2° Calculer, à 10^{-4} près, les termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite.

3° Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

II. Groupe II, série C

Ex. 501. ______ *4 points.* *./1986/amiensC/exo-1/texte.tex*

Dans le plan complexe, on considère les points : A d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, B d'affixe $2\mathrm{i}$.

M est le point d'affixe z, $z \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

$$\text{Soit} \qquad z = \frac{z - 2\mathrm{i}}{2z - 1 - \mathrm{i}}.$$

1° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

2° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

3° Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que qu'un argument de z' soit égal à $\frac{3\pi}{2}$.

Ex. 502. ______ *4 points.* *./1986/amiensC/exo-2/texte.tex*

Soit un triangle isocèle (OAB) $(OA = OB)$ et un point P variable du segment $[AB]$, $P \neq A$ et $P \neq B$.
La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A' et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B'.

1° Démontrer que $OA' = BB'$

2° En déduire qu'il existe une rotation r telle que $r(0) = B$ et $r(A') = B'$ dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB})$.
Démontrer que $r(A) = O$. Déterminer alors le centre Ω de cette rotation.

3° Démontrer que les quatre points O, A', B', Ω sont cocycliques.

✰Problème 140

./1986/amiensC/pb/texte

Le but du problème est :

– A. l'étude de la fonction g.

– B. La détermination d'un encadrement de g.

– C. L'évaluation d'une aire et de l'erreur commise.

On considère la fonction numérique g définie sur $[0\,;1]$ par

$$\begin{cases} g(t) = (1-\mathrm{e}^{-t})\ln t & \text{pour } 0 < t \leqslant 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(ln désigne le logarithme népérien.

A. 1° Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = 1$.

2° Démontrer que g est continue sur $[0\,;1]$. Étudier la dérivabilité de g sur $[0\,;1]$ et démontrer pour tout réel t de $]0\,;1]$ $g'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}(t\ln t + \mathrm{e}^t - 1)$.

3° Soit la fonction numérique f définie sur $]0\,;1]$ par $f(t) = t\ln t + \mathrm{e}^t - 1$.
Étudier le sens de variation et les valeurs aux bornes de f'. Montrer que f' s'annule une seule fois sur $]0\,;1]$ un un point t_0 (on ne calculera pas t_0).
En déduire le signe de $f'(t)$ et le sens de variation de f sur $]0\,;1]$.
En déduire que f ne s'annule qu'une seule fois sur $]0\,;1]$ pour une valeur t_1 (on ne calculera pas t_1).

4° Terminer l'étude de la fonction g. Tracer sa courbe représentative

B. Soit n un entier naturel. On définit qur $[0\,;1]$ la fonction numérique φ_n par

$$\varphi_0(t) = 1\ ;\ \varphi_1(t) = 1-t\ ;\ \varphi_2(t) = 1-t+\frac{t^2}{2!}$$

et pour tout $n > 2$,

$$\varphi_n(t) = 1-t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}.$$

1° Démontrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel t de $[0\,;1]$ $\varphi_n'(t) = -varphi_{n-1}(t)$.

2° On se propose de démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel t de $[0\,;1]$: $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$.

a) Soit ϕ et ψ deux fonctions numériques définies sur $[0\,;1]$, dérivables sur $[0\,;1]$ telles que $\phi(0) = \psi(0)$.
Démontrer que si pour tout réel t de $[0\,;1]$: $\phi'(t) \leqslant \psi'(t)$ alors pour tout réel t de $[0\,;1]$, $\phi(t) \leqslant \psi(t)$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel t de $[0\,;1]$: $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$.

3° Pour tout entier naturel n, déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur $]0\,;1]$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} et φ_{2n+1}.

C. On considère Δ l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(t\ ;\ y)$ dans le repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $g(t) \leqslant y \leqslant 0$.
On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire de Δ.

1° Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et α un réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$.
On pose

$$I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties. Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives.

2° En utilisant le B3, donner un encadrement de $\displaystyle\int_\alpha^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ au moyen des intégrales du type $I_n(\alpha)$.

En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

3° Donner en cm^2 une valeur approchée par excès de l'aire Δ à 10^{-2} près.

III. Groupe III, série C

✻ Ex. 503. ——— *4 points.* *./1986/besançonC/exo-1/texte.tex*

1° Déterminer le solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad \text{vérifiant} \quad : y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1.$$

Étudier les variations de cette fonction, et en tracer la courbe représentative (sur papier ordinaire) dans un repère orthonormé du plan (unité de longueur : 2 cm).

2° Pour n entier naturel, on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = xe^{-2^n x}$.

Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$.

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n (dans le même repère). Par quelle transformation simple passe-t-on de C_n à C_{n+1} ?

3° Calculer : $A_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose plus généralement : $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Comparer A_n et A_{n+1}.

Quelle est la nature de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

✻ Ex. 504. ——— *4 points.* *./1986/besançonC/exo-2/texte.tex*

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC non aplati. B' désigne le milieu de $[AC]$, C' celui de $[AB]$ et D le barycentre du système $\{(A,3);(B,2)\}$.

Soit I le barycentre du système $\{(A,2)(B,2)(A,1)(C,1)\}$.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(B',1)(C',2)\}$ et également du système $\{(D,5)(C,1)\}$. En déduire que I est le point d'intersection des droites $(B'C')$ et (CD).
2. La droite (AI) coupe le droite (BC) en E. Déterminer la position de E sur (BC). (On pourra utiliser le fait que I est le barycentre de $\{(B',1)(C',2)\}$)
3. B et C restent fixes. Le point A se déplace dans le plan $\mathscr{P}$, le segment $[AE]$ conservant une longueur constante. Déterminer les lieux géométriques des points I et D. (On utilisera des homothéties.)

☆Problème 141 *12 points.* *./1986/besançonC/pb/texte*

I. **Partie préliminaire.** Factoriser dans $\mathbb{R}$, le polynôme $2x^2 - \sqrt{2}x - 1$, et étudier, sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, le signe de l'expression :

$$f(\sigma) = 2\cos^2 - \sqrt{2}\cos\sigma - 1$$

on introduira dans cette étude l'unique réel $\sigma_0 \in]0\,;\pi[$ tel que : $\cos\sigma_0 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$.

(Pour la suite du problème, on considèrera que σ_0 radians correspondent approximativement à 116 degrés).

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité de longueur est le centimètre ; on considère le point d'affixe -4 et le cercle C de centre A et de rayon $4\sqrt{2}$.

Objet du problème. A tout réel σ on associe le point $P(\sigma) \in C$ tel que σ soit une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{\imath}\,;\widehat{\overrightarrow{AP(\sigma)}}\right)$. Soit $T(\sigma)$ la tangente à C au point $P(\sigma)$; on appelle $M(\sigma)$ le projeté orthogonal de O sur $T(\sigma)$.

On se propose d'étudier le lieu L des points $M(\sigma)$ lorsque σ décrit $\mathbb{R}$.

1⋆ a) Représenter graphiquement sur papier millimétré, avec le plus grand soin, les points $P(\sigma)$ et $M(\sigma)$ obtenus pour

$$\sigma \in \left\{0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6},\ \sigma_0\right\}.$$

On disposera ainsi des premiers éléments d'une figure destinée, sous le nom de « figure 1« ; à être complétée aux questions II(2)c, II(2)d et II3.

b) Démontrer que la droite (OA) est un axe de symétrie de **L**.

c) σ étant quelconque, on note $\vec{u}(\sigma)$ le vecteur unitaire tel que :

$\left(\widehat{\vec{i}\,;\vec{u}(\sigma)}\right) = \sigma$, et $H(\sigma)$ le projeté orthogonal de O sur la droite $(AP(\sigma))$.

Représenter O, A, C, $P(\sigma)$, $M(\sigma)$, $\vec{u}(\sigma)$, $H(\sigma)$ sur une nouvelle figure (figure 2) devant être complétée à la question II(4)b.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AP(\sigma)}$ et $\overrightarrow{AH(\sigma)}$ au moyen du vecteur $\vec{u}(\sigma)$; en déduire que les coordonnées $(x(\sigma,\ y(\sigma))$ du point $M(\sigma)$ sont données par :

$$\begin{cases} x(\sigma) = 4(\sqrt{2} - \cos\sigma)\cos\sigma \\ y(\sigma) = 4(\sqrt{2} - \cos\sigma)\sin\sigma. \end{cases}$$

d) Démontrer que l'affixe $m(\sigma)$ du point $M(\sigma)$ est donné par :

$$m(\sigma) = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma} - 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma} - 2 \quad (\mathrm{i} \in \mathbb{C},\ \mathrm{i}^2 = -1).$$

e) De même, démontrer que l'affixe $h(\sigma)$ du point $H(\sigma)$ est donnée par :

$$h(\sigma) = -2 + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma}.$$

$2^\star$ **Construction de L :**

a) EXpliquer pourquoi on peut, dans un premier temps, se limiter au cas où :

$$\sigma \in [0\,;\pi].$$

b) Etudier les variations, sur $[0\,;\pi]$ des fonctions $\sigma \longmapsto x(\sigma)$ et $\sigma \longmapsto y(\sigma)$.
(On établira en particulier que : $y'(\sigma) = -4f(\sigma)$, avec les notations de la partie I.)

c) Représenter sur la figure 1 les tangentes à **L** aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M(\sigma_0)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (On rappelle que la tangente à **L** au point $M(\sigma)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(\sigma),\ y'(\sigma))$, noté $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(\sigma)$, si ce vecteur est non nul.)

d) Achever le tracé de **L**, en se conformant aux résultats précédents.

$3^\star$ **Construction de la tangente en un point quelconque de L.**

Démontrer que l'affixe du vecteur $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(\sigma)$ s'obtient en multipliant par i l'affixe du vecteur $\overrightarrow{H(\sigma)M(\sigma)}$.
Interpréter géométriquement, et en déduire une construction pratique de la tangente à **L** en n'importe quel point ; illustrer ce résultat (sur la figure 1) dans le cas particulier où :

$$\sigma = \frac{3\pi}{4}.$$

$4^\star$ a) Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, calculer l'affixe $m(\sigma + \pi)$ du point $M(\sigma + \pi)$, et démontrer que l'affixe du milieu $\mathscr{K}(\sigma)$ du segment $[M(\sigma)M(\sigma + \pi)]$ est donnée par :

$$l(\sigma) = -2(1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma}).$$

b) Démontrer que le lieu du point $\mathscr{K}(\sigma)$, lorsque σ décrit $\mathbb{R}$, est le cercle de diamètre $[OA]$. Illustrer ce résultat, sur la figure 2.

c) Démontrer que $H(\sigma)$ est le point de Γ diamétralement opposé à $\mathscr{K}(\sigma)$.

IV. Groupe IV, série C

✻ Ex. 505. ——— *5 points.* ./1986/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\ \vec{e_1},\ \vec{e}_2)$.

On désigne par F l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $F(z) = \dfrac{z^3}{2+\left|z^3\right|}$

et par φ l'application de P dans P qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $F(z)$.

1° Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ où le couple $(r,\ \alpha)$ appartient à $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.
Trouver un couple $(r',\ \alpha')$ appartenant à $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ tel que $F(z) = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}$.

2° On note f l'application de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}.$$

Démontrer que f applique bijectivement $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;1[$.

3° On considère la cercle Γ de centre O et de rayon 1 et T le point d'affixe $1-\mathrm{i}$.
Trouver l'image par φ du cercle Γ et de la demi-droite $[OT)$.
Quelle est l'image par φ de P ?

✻ Ex. 506. ——— *5 points.* ./1986/bordeauxC/exo-2/texte.tex

On considère un carré $(A,\ B,\ C,\ D)$ situé dans un plan P de l'espace. O désigne le centre de ce carré, H un point distinct de O de la droite perpendiculaire en O au plan P, et H' son symétrique par rapport à O.
On note E l'ensemble $\{A,\ B,\ D\}$ et F l'ensemble $\{B,\ C,\ D\}$.
L'objet de cet exercice est de décrire l'ensemble W des isométries qui appliquent E sur F.

1° Démontrer que l'ensemble W n'est pas vide.

2° Soit f un élément de W. Prouver les égalités :

$$\begin{aligned} f(A) &= C \\ f(\{B,\ D\}) &= \{B,\ D\} \\ f(O) &= O \\ f(H) &= H \quad \text{ou} \quad f(H) = H'. \end{aligned}$$

3° Déterminer et reconnaître tous les éléments de W.

✩**Problème 142** *10 points.* ./1986/bordeauxC/pb/texte

Les parties A et B sont indépendantes.
Dans tout le problème $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.
Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

A. On désigne par f l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x.$$

1° Étudier la limite de f en 0 et $+\infty$.
Dresser le tableau de variation de f.
Dessiner la courbe $\mathscr{F}$ représentant f dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

2° Soit n un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, on note A_i le point de $\mathscr{F}$ d'abscisse 10^i.
Soit G_n le barycentre des n points $A_1,\ \dots,\ A_n$.
Calculer en fonction de n les coordonnées x_n et y_n de G_n.

3° a) Vérifier que l'application ln admet pour primitive sur $]0\,;+\infty[$ l'application qui à x associe $x\ln x - x$.

Retour page 1

b) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre les droites d'équations :

$$x = 1, \quad x = \mathrm{e}, \quad y = 0 \text{ et la courbe } \mathscr{F}.$$

B. On désigne par P' l'ensemble des points de P d'abscisse non nulle et par θ l'application de P' dans P' qui associe à tout point M de coordonnées x et y le point M' de coordonnées x' et y' vérifiant

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ y' = -y. \end{cases}$$

1° Vérifier que θ est bijective et égale à sa bijection réciproque.

2° On désigne par E le sous-ensemble de P' d'équation $xy = -9$.
Trouver l'ensemble $\theta(E)$.
Est-ce que θ conserve l'alignement ?

3° Pour tout nombre réel a, on note g_a l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_a(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} - 4a\ln x$ et G_a sa courbe représentative dans $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Montrer l'égalité $\theta(G_a) = G_a$.

V. Lille, série C

Ex. 507. *5 points.* *./1986/lilleC/exo-2/texte.tex*

1° Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie pour $x \neq 1$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}.$$

a) Déterminer a, b, c, d réels tels que l'on ait, pour $x \neq 1$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}.$$

b) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2° Calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1 - x)\,\mathrm{d}x.$$

Ex. 508. *5 points.* *./1986/lilleC/exo-2/texte.tex*

1° Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie pour $x \neq 1$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}.$$

a) Déterminer a, b, c, d réels tels que l'on ait, pour $x \neq 1$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}.$$

b) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Retour page 1

2° Calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x)\,dx.$$

VI. Amérique du Nord, série C

Ex. 509. ./1986/ameriquenordC/exo-1/texte.tex

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$ où z désigne un nombre complexe et λ un nombre réel.

1° Montrer que si $P(z) = 0$ admet une racine complexe z_0, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution.
En déduire que l'équation $P(z)$ admet au moins une solution réelle sans chercher à résoudre l'équation.

2° Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine réelle de module 2. Résoudre l'équation pour la valeur de λ trouvée.

3° Déterminer λ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine complexe de module 2. Résoudre l'équation pour les valeurs de λ trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.

Ex. 510. ./1986/ameriquenordC/exo-2/texte.tex

Dans le plan, on donne deux points distincts A et B.
Soit (D) la perpendiculaire à (AB) en B. On considère tous les cercles (C) du plan caractérisés par la propriété suivante : T et T' étant deux points de contact des tangentes menées en A au cercle (C), le triangle ATT' est équilatéral.

1° En étudiant le rapport des distances du centre d'un cercle (C) aux points A et B, déterminer et préciser la nature des l'ensemble des centres des cercles (C) qui passent par B.

2° Déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) tangents à la droite (D).

N.B. – Pour faire la figure on prendra $AB = 6$ cm.

VII. Amérique du Sud, série C

Ex. 511. ./1986/ameriquesudC/exo-1/texte.tex

Dans le plan rapporté à une repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C deux à deux distincts dont les affixes respective sont les nombres complexes a, b, c.

1. M étant le point du plan d'affixe z, exprimer, en fonction de z :

   a. l'affixe z' du point M' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{3}$ (en radians) ;

   b. l'affixe z'' du point M'' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ (en radians).

2. Que peu-on dire du triangle ABC si les nombres complexes a, b, c vérifient

   a. $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$;

   b. $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$;

3. Établir que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Retour page 1

✻ Ex. 512. ./1986/ameriquesudC/exo-2/texte.tex

dans le plan, on considère le parallélogramme $KLMN$ et le point de concours O de ses diagonales (MN) et (KL).
Soit A un point de la droite (KN), distinct de K et de N ;
soit B le point d'intersection de la droite (MA) et de la droite (LN).
P et Q sont respectivement les projetés, parallèlement à la droite (MN), de A sur la droite (KM) et de B sur la droite (LM).

1° Faire une figure.

2° a) On note h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KN}}$.

Démontrer que $h(M) = P$.
En déduire que le milieu I du segment $[AP]$ appartient la droite (KL).

b) Indiquer l'homothétie qui permettrait de démontrer que le milieu J du segment $[BQ]$ appartient à la droite (KL).

3° Justifier que les points N, P, Q sont les images respectives des points M, A, B par une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.
En déduire que les points N, P, Q sont alignés.

VIII. Groupe I bis, série C

✻ Ex. 513. ./1986/groupeIbisC/exo-1/texte.tex

Soit dans un plan, unn triangle $A_1A_2A_3$.
Á tout point M du plan, distinct des sommets A_1, A_2, A_3, du triangle, on associe :

a) les points M_1, M_2, M_3, symétriques de M dans les symétries orthogonales $s_{(A_2A_3)}$, $s_{(A_3A_1)}$, $s_{(A_1A_2)}$ d'axes respectifs (A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2).

b) Les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 issues des sommets A_1, A_2, A_3 et respectivement perpendiculaires aux droites (M_2M_3), (M_3M_1), (M_1M_2).
Les symétries orthogonales d'axes Δ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, sont notées s_{Δ_i}.
On désigne par $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ des vecteurs directeurs respectifs de Δ_1, Δ_2, Δ_3.

1° Démontrer que Δ_1 est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$.

2° Soit $s = s_{(A_1A_2)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_3)}$.

a) Quelle est la nature de s ?

b) Déterminer $s(A_1)$ et $s(M)$. Caractériser s.

c) Démontrer que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_3};\overrightarrow{A_1M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{A_1A_2}}\right) [\pi] \tag{1}$$

3° Établir d'une manière analogue

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1};\overrightarrow{A_2M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{A_2A_3}}\right) [\pi] \tag{2}$$

et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_3A_2};\overrightarrow{A_3M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_3};\overrightarrow{A_3A_1}}\right) [\pi] \tag{3}$$

4° Montrer que l'ensemble (C) des points M du plan, distincts des sommets A_1, A_2, A_3, tels que les points M_1, M_2, M_3 soient alignés est contenu dans le cercle circonscrit au triangle $A_1\ A_2\ A_3$.

5° On suppose, dans cette question, que le point M n'appartient pas à (C).

a) Démontrer que les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont concourantes en un point P que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.
Dans la suite du problème ce point P appelé l'associé du point M.

b) Quel est l'associé d'un point M appartenant aux côtés du triangle A_1,A_2A_3 et distinct des sommets de ce triangle ?

c) On suppose que le point M n'appartient pas aux supports des côtés du triangle $A_1A_2A_3$.
Démontrer, en utilisant les relations (1), (2) et (3) que si M a pour associé P alors le point P a pour associé le point M.

IX. Japon, série C

Ex. 514. ./1986/japonC/exo-1/texte.tex

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{-\frac{4}{3}}^{-1} \frac{2x+1}{(3x+2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Pour le calcul de I_2, on pourra effectuer un changement de variable affine.

Ex. 515. ./1986/japonC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 1 + x - \ln\left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right|.$$

1° Montrer qu'on a pour tout x :

$$f(x) = 1 - \ln\left|1 - \mathrm{e}^{1-x}\right|$$
$$f(x) = x - \ln\left|\mathrm{e}^{x-1} - 1\right|$$

2° Dresser la tableau de variation de f.

3° Montrer que f définit une bijection g de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
Définir g^{-1} et vérifier que $g^{-1} = g$.

X. Nouvelle Calédonie, série C

Ex. 516. *4 points.* ./1986/nllecaledonieC/exo-1/texte.tex

1° a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 - 1 = 0$.

b) En déduire un polynôme du second degré de la forme $z^2 + bz + c$, (b et c sont des nombres réels),ayant pour zéros les racines cubique de l'unité non réelles.

2° Étant donné un nombre complexe z, on pose $\varphi(z) = z^2 + z + 1$.
Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité de longueur étant 3 cm.

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit réel.

b) Démontrer que l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur est une conique dont on précisera une équation réduite.

c) Représenter sur une même figure les ensemble E_1 et E_2 ; déterminer les affixes des points de $E_1 \cap E_2$.

Ex. 517. *5 points.* ./1986/nllecaledonieC/exo-2/texte.tex

On considère dans l'espace E, un carré $ABCD$, de centre O et de côté a, contenu dans un plan P.
Soient S un point de E n'appartenant pas au plan P et A', B', C', D' les milieux respectifs des segments SA, SB, SC, SD.

1° Démontrer que :

(i) les points A', B', C', D' appartient à un même plan P' parallèle à au plan P et $P' \neq P$;

(ii) le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré ; on note O' son centre ;

(iii) les points S, O, O' sont alignés.

Dessiner un croquis de la figure ainsi obtenue.

2° Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan P tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2.$$

Déterminer l'ensemble décrit par le milieu M' du segment SM quand le point M décrit l'ensemble Ω.

✩Problème 143 *11 points.*

./1986/nllecaledonieC/pb/texte

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2-1}\,dt.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

I. *L'objet de cette partie est l'étude de la fonction F et de sa courbe représentative C dans un repère orthonormé* $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ *où l'unité graphique est 4 cm.*

1° Étudier la parité de F.

2° Montrer que F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée ; en déduire la sens de variation de F sur $[0\,;+\infty[$.

3° Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{e}$.

En déduire la position de C par rapport à la tangente au point d'abscisse nulle.

4° a) Prouver que pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{2x} e^{-2t}\,dt$.

En déduire que F est bornée sur $[0\,;+\infty[$.

b) On admettra que les résultats acquis aux I2 et I(4)a permettent de conclure que F possède une limite λ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c) Tracer l'allure de la courbe C.

II. On se propose maintenant d'étudier la fonction numérique G définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2-1}\,dt.$$

1° Exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

2° Démontrer que G est dérivable et calculer sa dérivée G'.

3° Soit φ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2xe^{-x^4+x^2} - 1.$$

a) Étudier les variations de φ.

b) Démontrer l'existence de deux réels α_1 et α_2 vérifiant :

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 < \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}\ ;\ 1 < \alpha_2 < 2 \\ \varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2) = 0. \end{cases}$$

c) En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $\varphi(x)$.

d) Exprimer $G'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$; en déduire le tableau de variations de G.

4° *i.* Trouver deux solutions distinctes et positives, x_1 et x_2, de l'équation $G(x) = 0$.

ii. Soit Γ la courbe représentative de G. On désigne par M_1 (resp. M_2) le point de Γ d'abscisse x_1 (resp. x_2) ; écrire une équation de la tangente à Γ en M_1 (resp. M_2).

iii. Tracer Γ ; (rappel : l'unité graphique est 4 cm).

Retour page 1

XI. Nouvelle Calédonie, série E

✰Problème 144

./1986/nllecaledonieE/pb/texte

Pour tout entier naturel n, on note f_n l'application de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$$

pour x appartenant à $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f_n(0) = 2n+2$.
Le but de ce problème est d'établir la convergence de la suite u de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie A *Préliminaires*

1° Montrer que f_n est continue dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$; en déduire que la suite u est bien définie dans $\mathbb{N}$.

2° Montrer que : $u_{n+1} - u_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. (On rappelle que $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$.)

3° Calculer u_0, u_1 et u_2.

Partie B *Le but de cette partie est d'établir la convergence de u*

1° Montrer que :

$$u_n = 2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

2° Calculer $\int_0^1 \mathrm{d}x$, $\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x$, k étant un entier naturel non nul.

En déduire que :

$$u_n = 2\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3° Établir

$$\left| u_n - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{2}{2n+3}.$$

4° En déduire la convergence de la suite u.

Partie C *Le but de cette partie est de calculer* $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit F la primitive nulle en zéro de φ ; soit G l'application de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(v) = F(\tan v).$$

1° Montrer que G est dérivable et admet une fonction dérivée G' très simple que l'on précisera.

2° En déduire G.

3° En déduire la valeur de J. Quelle est la limite de la suite u ?

Retour page 1

XII. Paris, série C

✻ Ex. 518. ./1986/parisC/exo-1/texte.tex

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$; on prend comme unité graphique 1 cm.
On considère l'équation

$$z^3 - (6+3\mathrm{i})z^2 + (9+12\mathrm{i})z - 9(2+3\mathrm{i}) = 0. \qquad \text{(E)}$$

1° a) Démontrer que E admet une solution imaginaire pure unique z_1 que l'on calculera.

b) Déterminer les autres solutions de E, notées z_2 et z_3.

2° Soit M_1, M_2, M_3 les points ayant respectivement pour affixes z_1, z_2, z_3.

a) Prouver que le triangle M_1M_2M3 est équilatéral.

b) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[M_2M_3]$ et de l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3.

c) Placer les points M_1, I et G sur cette figure et indiquer une construction géométrique de M_2 et M_3.

✻ Ex. 519. ./1986/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté P, on considère un triangle ABC équilatéral direct, c'est à dire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

1° a) Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer $r(D)$ et $r(B)$.

b) Montrer que r est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de $[BD]$.

2° a) Montrer que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω (on pourra considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA})$).

b) Prouver que Γ admet $[AD]$ pour diamètre et que le milieu I de $[AB]$ appartient à Γ. Construire le cercle Γ.

✩Problème 145 ./1986/parisC/pb/texte

A- L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

et d'expliciter sa fonction réciproque g.

1) a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

b) Déterminer la solution φ de cette équation telle que :

$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{et} \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

Comparer φ et f.

2) a) Étudier les variations de f, donner son tableau de variations et tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ en prenant 1 cm pour unité.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3) a) Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque g de f sur la même figure que C.

b) Expliciter g en résolvant l'équation $f(x) = y$ où y est un nombre réel.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(y) = \int_0^y \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

(On ne cherchera pas à calculer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$.)

B- 1) a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Déterminer le sens de variation de G.

c) Montrer que G est impaire.

2) a) Prouver que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{1+2t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

b) En déduire par un minoration de G sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ que :

$$\lim_{y\to+\infty} G(y) = +\infty.$$

3) a) Montrer que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit F la fonction réciproque de G. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre réel x :

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4(F(x))^2}.$$

c) En déduire que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'' - F = 0$.
Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.

d) Prouver que $F = f$ et que $G = g$.

e) Contrôler ce dernier résultat grâce à un calcul direct de la dérivée de g.

4) On se propose d'étudier le comportement asymptotique de G au voisinage de $+\infty$, en comparant $\dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ à $\dfrac{1}{t}$.

Plus précisément, pour tout nombre réel $t \geqslant 1$, on pose :

$$h(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

et pour tout nombre réel $y \geqslant 1$, on pose :

$$H(y) = \int_1^y h(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{8t^3}.$$

b) En déduire que $H(y)$ admet une limite finie (qu'on ne demande pas d'expliciter) lorsque y tend vers $+\infty$.

c) Prouver que $G(y) - \ln y$ admet un limite finie ℓ lorsque y tend vers $+\infty$.

d) Calculer ℓ grâce à la relation $G = g$.

XIII. Rouen, série C

Ex. 520. ./1986/rouenC/exo-1/texte.tex

Soit un triangle isocèle OAB ($OA = OB$) et P un point variable du segment $[AB]$, $P \neq A$ et $P \neq B$.
La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A' et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B'.

1° Démontrer que $OA' = BB'$.

2° En déduire qu'il existe une rotation r telle que $r(O) = B$ et $r(A') = B'$ dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
Démontrer que $r(A) = O$. Déterminer alors le centre Ω de cette rotation.

3° Démontrer que les points O, A', B', Ω sont cocycliques .

Chapitre 27

1987.

Sommaire

I. Aix Marseille, série C

Ex. 521. ./1987/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

1° La lettre x désigne un nombre réel, linéariser $\sin^6 x$.

2° On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

Démontrer que $I = \dfrac{15\pi - 44}{1152}$.

II. Espagne, série C

Problème 146 ./1987/espagneC/pb/texte

Ce problème a pour buts, d'une part d'étudier la suite $\dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!}$, d'autre par de donner une expression de e^a comme limite d'un suite.
Pour tout entier $n > 0$, note f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On prendra $\left\|\vec{i}\right\| = 2$ cm et $\|j\| = 10$ cm.

Partie A

1° Déterminer le tableau de variation de f_n sur $[0\,;+\infty[$.

2° Pour tout entier $n \geqslant 2$, étudier la position relative de C_n et de C_{n-1} et vérifier que le point A_n de coordonnées $(n\ f_n(n))$ appartient à C_{n-1}.

3° Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes C_1, C_2 et C_3 ; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

Partie B

Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = f_n(n)$.

1° a) En utilisant les résultats du 146, démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier. On se propose, dans les questions suivantes, de déterminer la limite de cette suite.

2° a) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,1]$, par

$$g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}.$$

En utilisant les variations de g, démontrer que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{1-\frac{1}{4n}}.$$

3° a) Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{4n}}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)}.$$

4° a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{4}\ln n}.$$

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Partie C

Pour tout entier $n > 0$ et tout réel a positif ou nul, fixé, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

1° Calculer $I_1(a)$.

2° Démontrer que pour tout entier $n > 0$ et tout réel t positif ou nul, on a :

$$0 \leqslant I_n(a) \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3° a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{1}{n!} < \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n.$$

(On pourra utiliser 1a.)

b) Déterminer alors un nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

4° a) Établir pour tout entier $n \geqslant 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$I_n(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\right).$$

Cette égalité reste-telle valable pour $n = 1$?

5° Démontrer que pour tout a de $[0\,;+\infty[$ on a :

$$\mathrm{e}^a = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\right).$$

Chapitre 28

1988.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Paris, Lille, Amiens & Rouen ;
– groupe II : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours ;
– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;
– groupe IV : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse.

I. Groupe I, série C

✻ Ex. 522. ——— *4 points* *./1988/lilleC/exo-1/texte.tex*

On donne dans le plan un point O et une droite (Δ) ne passant pas par O.
On se propose de donner une construction de l'intersection d'une droite (D) passant par O et non perpendiculaire à (Δ) avec l'ellipse (E) d'excentricité $\frac{1}{2}$, de foyer O et de directrice associée (Δ).
On note $\vec{i}$ un vecteur unitaire orthogonal à (Δ) et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de (D).

1° Pour tout point M de (D), on définit deux points H et H' tels que $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MH'}$ soient orthogonaux à (Δ) et de norme égale à $2.MO$.
Montrer que lorsque M décrit (D), H et H' décrivent deux droites (D_1) et (D_2) passant par O, dont on précisera un vecteur directeur en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2° L'une des deux droites (D_1) et (D_2) peut-elle être parallèle à (Δ) ?

3° Utiliser les questions précédentes pour construire l'intersection de l'ellipse (E) et de la droite (D).
Faire une figure soignée dans laquelle on prendra 4 cm pour la distance de O à (Δ) et $\frac{\pi}{2}$ pour mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{i}\,;\vec{j}}\right)$. Il n'est pas demandé de construire l'ellipse (E).

✻ Ex. 523. ——— *4 points* *./1988/lilleC/exo-2/texte.tex*

On considère dans le plan (P) orienté le losange $AIBI'$.
Soit r la rotation de centre A qui transforme I en I'.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que M, B et l'image M' de M par r soient sur une même droite.

1° Soit C le point dont l'image par r est B. Démontrer que C est sur le cercle de centre I et de rayon IA.

2° En supposant M distinct de B et de C, démontrer que M, B et M' sont alignés si, et seulement si,

$$(\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{BA}) \quad \text{mod } \pi.$$

3° En déduire que l'ensemble des points M tels que M, B et M' soient sur une même droite.

II. Groupe II, série C

✻ Ex. 524. ———— *5 points.* *./1988/bordeauxC/exo-1/texte.tex*

Un questionnaire à choix multiple (Q.C.M) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat répond au hasard.

1° Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M.

2° a) Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.

b) Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à 6 questions.

3° Quelle est la probabilité que la candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes ?

✻ Ex. 525. ———— *5 points.* *./1988/bordeauxC/exo-2/texte.tex*

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A un point de P d'affixe a non nulle et soit ABC le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O, de rayon OA et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ soit de mesure $\frac{\pi}{3}$.

1° Déterminer, en fonction de a, les affixes b et c des points B et C respectivement.

2° On désigne par M le point d'affixe $z = a^3$.
Déterminer A pour que M soit le milieu de $[BC]$.

3° Dans cette question, le point A décrit le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.
Déterminer l'ensemble des points N tels que le quadrilatère $ABNC$ soit un losange.

III. Groupe IV, série C

✻ Ex. 526. ———— *./1988/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

θ étant un nombre réel de l'intervalle $]0\,;2\pi[$, on considère les deux nombres complexes :

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad (\text{ou encore } z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \qquad \text{et } Z = \frac{1+z}{1-z}$$

et on note $|Z|$ le module de Z.

1° Montrer que $Z = \mathrm{i}\cotan\frac{\theta}{2}$ (où $\cotan\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$).

2° Pour quelles valeurs de θ l'argument de Z est-il défini ?
A quoi est-il alors égal ? (On distinguera deux cas suivant les valeurs de θ.)

3° A quoi est égal $|Z|$?

4° On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |Z|\,\mathrm{d}\theta$. Justifier l'existence de cette intégrale et la calculer (on pourra mettre $|Z|$ sous la forme $k\dfrac{u'(\theta)}{u(\theta)}$ où k est un nombre réel et u une fonction de θ).

✻ Ex. 527. ———— *./1988/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

On considère dans le plan orienté deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même rayon r, de centre respectifs O_1 et O_2 et tangents extérieurement en A.
On appelle f la transformation obtenue en effectuant d'abord la translation T de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ puis la rotation R de centre O_2 et d'angle $+\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π). (On donne donc $f = R \circ T$).

1° Dessiner la figure $\mathscr{F}$ formée par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en prenant $r = 4$ cm.

2° Soit M_1 un point quelconque de $\mathscr{C}_1$. Montrer que $M_2 = f(M_1)$ est un point de $\mathscr{C}_2$. Faire apparaître M_1 et M_2 sur la figure $\mathscr{F}$.

3° Déterminer l'image de O_1 par f.

4° On pose $A' = f(A)$ et on appelle B le symétrique de A par rapport à O_2. Que peut-on dire du triangle $O_2A'B$? Placer le point A' sur la figure $\mathscr{F}$.

5° Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle α et le centre I. Placer I sur la figure $\mathscr{F}$. Que peut-on dire du triangle O_1O_2I ? Exprimer AI en fonction de r.

✰Problème 147

./1988/aixmarseilleC/pb/texte

A) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ (pour déterminer l'une des asymptotes, on étudiera $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$)
.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2° a) Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y = m$.
Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.

b) Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.
Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $\left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de le droite D d'équation $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$.

3° On construit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- A_0 est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2,
- pour tout $n \geqslant 0$, à partir du point A_n de $\mathscr{C}$, on détermine B_n, deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la parallèle à $x'x$ passant par A_n,
- puis I_n milieu du segment $[A_nB_n]$,
- A_{n+1} est alors le point de $\mathscr{C}$ de même abscisse que I_n.

(On admet, et il n'est pas demandé de le démontrer, que le procédé décrit ci-dessus définit bien la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)
Placer sur la figure les points A_0, B_0, I_0, A_1, B_1, I_1.
On appelle x_n l'abscisse de A_n.
Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{2x_n}\right)\ ; \qquad x_0 = 2$$

(on utilisera la question A(2)b.)

B) *Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la fin de la partie précédente.*

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, x_n est défini et strictement positif.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{2x_n}.$$

c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $x_n \geqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et ensuite que

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

d) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout $n \geqslant 0$

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{2^n}.$$

(Pour démontrer la deuxième inégalité de cette double inégalité, on procédera par récurrence et l'on pourra poser, pour simplifier, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}$.)

e) En utilisant l'égalité $\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{2^n} = \mathrm{e}^{(2^n)\ln\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

f) *Calcul sur machine*
En utilisant toute la précision de la calculatrice, présenter dans un tableau les valeurs décimales approchées des six premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les six premiers termes de la suite $(x_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$.
(La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie à la fin de la partie A du problème et l'on a posé $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.)

IV. Paris remplacement, série C

Ex. 528. ./1988/parisCrem/exo-1/texte.tex

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit Θ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
Pour tout Θ de cet intervalle, on définit le nombre complexe :

$$z(\Theta) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\Theta})^2.$$

1° Calculer $(1 + e^{i\Theta})e^{-i\frac{\Theta}{2}}$; en déduire que le nombre complexe $(1 + e^{i\Theta})$ a pour argument $\frac{\Theta}{2}$.
Calculer le module et un argument de $z(\Theta)$.
Représenter dans le plan complexe, $z(\frac{\pi}{6})$.

2° Soit M le point d'affixe $z(\Theta)$ et A le point d'affixe 1. On projette orthogonalement A en P sur la droite (OM).
Quel est l'ensemble des points P quand Θ varie dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
Calculer la distance PM. Pour cela on séparera les cas $\Theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\Theta \in]-\pi, \frac{-\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

3° Donner une construction géométrique de l'ensemble des points M (point par point), quand θ varie dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Chapitre 29

1989.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

– groupe II : Amiens, Lille & Rouen ;

– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers & Orléans-Tours.

I. Groupe I, série C & E

✻ Ex. 529. ./1989/groupeICE/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On donne les points :

$$A(4\,;\,-1)\,;\qquad B(1+\sqrt{3}\,;\,2+\sqrt{3})\,;\qquad C(2-2\sqrt{2}\,;\,1)\,;\qquad D(0\,;\,-1).$$

Placer ces points en prenant 1,7 comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ et 1,4 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.
On désigne par a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D.

1° Montrer que

$$\frac{a-c}{d-c}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)(1+\mathrm{i}).$$

On admettra que $\dfrac{a-b}{d-b}=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.

2° Déduire de ces résultats les mesures respectives des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}}\right)$.

Montrer que les points A, B, C, D sont sur un cercle $(\mathscr{C})$.

Construire son centre Ω puis dessiner $(\mathscr{C})$.

3° On considère la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Quelle est l'image de D par cette rotation.

En écrivant l'expression complexe de cette rotation trouver l'affixe de Ω.

II. Groupe II, série C & E

✻ Ex. 530. ./1989/groupeIICE/exo-1/texte.tex

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On notera A le point d'affixe $-1+2\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $2-\mathrm{i}$.

1° Déterminer et représenter dans le plan (P) l'ensemble (E_1) des points M de (P) d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que :

$$z^2 - (1-2\mathrm{i})^2 = \overline{z}^2 - (1+2\mathrm{i})^2$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Vérifier que A et B appartiennent à (E_1).

2° Déterminer et représenter dans le plan (P) l'ensemble (E_2) des points M de (P) d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que :

$$(z-(1+\mathrm{i}))(\overline{z}-(1-\mathrm{i})) = 5.$$

Vérifier que A et B appartiennent à (E_2).

III. Japon, série C & E

✻ Ex. 531. ./1989/japonC/exo-1/texte.tex

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1° Pour tout point M du plan, on note z son affixe.

a) Vérifier que l'ensemble des points M tels que $\overline{z} + z + 4 = 0$ est une droite $\mathscr{D}$. Tracer $\mathscr{D}$.

b) Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{P}$, la distance de M à $\mathscr{D}$ est :

$$\frac{1}{2}|z + \overline{z} + 4|.$$

2° On note F le point d'affixe $1+\mathrm{i}$ et $\mathscr{P}'$ la plan $\mathscr{P}$ privé de la droite $\mathscr{D}$.
Soit E l'ensemble des points M, d'affixe z, de $\mathscr{P}'$ tels que :

$$\left|\frac{z-1-\mathrm{i}}{z+\overline{z}+4}\right| = \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Démontrer que E est une conique à centre dont on précisera l'excentricité et la nature. Vérifier que E passe par O.

IV. Paris, série C

✻ Ex. 532. *5 points.* ./1989/parisC/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, l'unité graphique étant 4 cm, on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = -jz + \mathrm{i}, \quad \text{où} \quad j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

1° Montrer que f admet exactement un point invariant Ω, dont on donnera l'affixe. Caractériser géométriquement f.

2° On définit dans P la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} M_0 = O \\ \text{Pour tout } n,\ M_{n+1} = f(M_n). \end{cases}$$

a) Construire Ω, M_0, M_1, M_2.

b) Pour tout entier n, on note z_n l'affixe de M_n et on pose

$$Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Déterminer un nombre complexe a tel que, pour tout entier n,

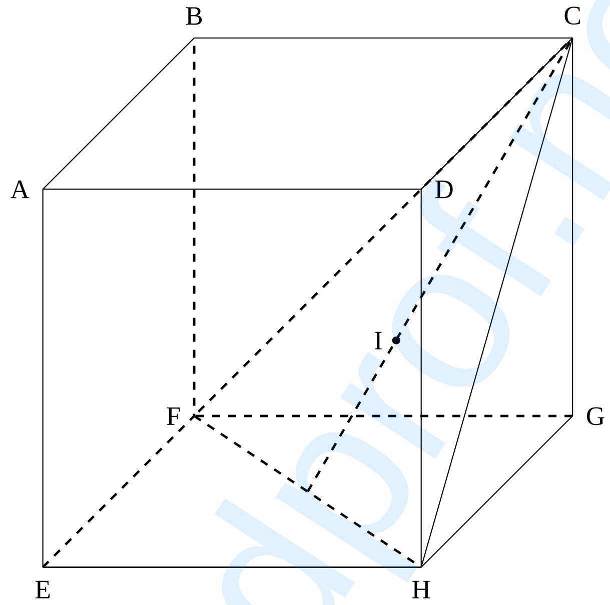
$$Z_{n+1} = aZ_n.$$

Mettre a sous forme trigonométrique et déterminer un entier p strictement positif tel que $a^p = 1$.

c) Calculer Z_n puis z_n en fonction de n. Calculer z_{1989} et placer M_{1989} sur le dessin.

Ex. 533. ./1989/parisC/exo-2/texte.tex

On considère un cube ABCDEFGH d'arête a.
On note I l'isobarycentre du triangle CFH.



1° a) Prouver que le triangle CFH est équilatéral.

b) Prouver que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CH] et au plan médiateur de [CF].

c) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

2° On note P le plan contenant les droites (AB) et (HG) et P' le plan contenant les droites (AD) et (FG). On désigne par s et s' les réflexions par rapport aux plans P et P'.

a) Déterminer l'intersection des plans P et P'.

b) Déterminer les images des points C, F et H par s puis s', puis par $s' \circ s$.

c) Indiquer la nature de $s' \circ s$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

V. Paris, série E

Ex. 534. *4 points.* ./1989/parisE/exo-1/texte.tex

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB})$. Unité graphique : 8 cm.
On note C le milieu du segment $[AB]$.
Soit r la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M du plan d'affixe u, on note M' le transformé de M par r.

1° a) Placer sur une figure les points O, A, B, M et M' lorsque $u = \frac{3}{4}$.

Retour page 1

b) Déterminer l'image du segment $[OA]$ par r.

c) Calculer l'affixe u' de M' en fonction de l'affixe u de M.

2° On note P le milieu du segment $[OC]$.
Soit N le milieu du segment $[BM]$ et N' le milieu du segment $[AM']$.

a) Exprimer en fonction de u les affixes Z et Z' des vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PN'}$.

b) Prouver que le triangle PNN' est rectangle et isocèle.

c) Dans le cas où $u = \frac{3}{4}$, placer le triangle PNN' sur la figure précédente.

VI. Tunisie Grèce, série C & E

Ex. 535. ./1989/tunisieC/exo-1/texte.tex

1. Déterminer deux réels p et q tels que, pour tout $t \in]-\infty\,;3[$,

$$\frac{t}{t-3} = p + \frac{q}{t-3}.$$

2. Soit $a < 3$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{t-3}\,\mathrm{d}t$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^a \ln\left(1-\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t$. On pourra utiliser une intégration par parties.

Chapitre 30

1990.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;
– groupe II : Amiens, Lille & Rouen ;
– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;
– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Poitiers, Orléans-Tours & Rennes.

I. Groupe I, série C

Ex. 536. *4 points.* *./1990/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Soit P la plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 1 cm. On donne les points A et B d'affixes respectives 12 et 9i et l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z définie par $Z = -\frac{3}{4}\mathrm{i}z + 9\mathrm{i}$.

1° Démontrer que f admet un point invariant Ω de coordonnées $\left(\frac{108}{25}\ ;\ \frac{144}{25}\right)$.

Démontrer que f est une similitude plan directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$, de rapport $\frac{3}{4}$. Quel est son centre ?

2° Quelles sont les images par f des points A et O ?
Montrer que Ω est commun aux deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$.
Établir que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB et montrer que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.
Faire une figure comportant les points Ω, A, B ainsi que les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et (C_2).

II. Groupe II, série C

Ex. 537. *4 points.* *./1990/amiensC/exo-1/texte.tex*

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

1° Trouver les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait

$$f(z) = (z^2+4)(z^2+az+b).$$

2° En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

3° Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

III. Groupe IV, série C

✻ Ex. 538. ———— *4 points.* *./1990/bordeauxC/exo-2/texte.tex*

1° Dans l'espace, on donne deux points A et B distincts.

a) Montrer que toute rotation R de l'espace transformant A en B a son axe D inclus dans le plan médiateur de $[A,\ B]$.

b) Réciproquement, soit D une droite du plan médiateur de $[A,\ B]$.
Montrer qu'il existe une rotation R et une seule d'axe D transformant A en B. On pourra introduire le projeté orthogonal K de A sur D.

2° Soit $OABC$ un tétraèdre régulier.

a) Montrer qu'il existe une rotation R_1 et une seule d'axe (OC) transformant A en B.

b) Montrer que le projeté orthogonal K de A sur (OC) est le milieu de $[OC]$.

c) Déterminer le cosinus de l'angle de la rotation R_1.

IV. Paris, série C

✻ Ex. 539. ———— *5 points.* *./1990/parisC/exo-1/texte.tex*

Dans le plan orienté, on suppose donnés deux points I et O.
On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie centrale de centre I.

1° a) Soit $OJO'G$ le carré direct de centre I. Faire une figure avec $IO = 4\ cm$.

b) Prouver que $s \circ r$ est la rotation de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

c) En déduire que J est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.
Désormais, pour tout couple (M,N) de points du plan, on pose $r(M) = A, s(M) = B, r(N) = C$ et $s(N) = D$.

2° Soit M un point donné distinct de J. On suppose que J est le milieu de $[MN]$.

a) Démontrer que $ABCD$ est un carré de centre G.

b) Placer les points M et N sur la figure ainsi que le carré $ABCD$.

3° Le point M étant toujours distinct de J, on suppose inversement, que N est tel que $ABCD$ soit un carré.
Démontrer qu'alors J est la milieu du segment $[MN]$ et que G est le centre du carré $ABCD$.
(On pourra introduire J' le milieu de $[MN]$ et G' le centre du carré $ABCD$, et on comparera $r(J')$ et $s(J')$.)

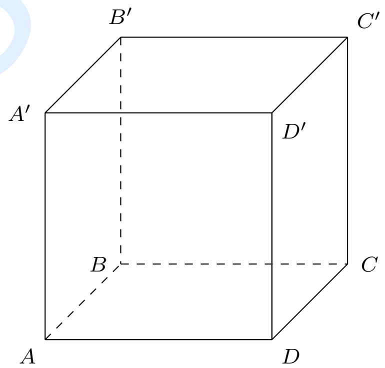
4° Soit r' le quart de tour direct de centre G.

a) Démontrer que $r' \circ r = s$.

b) En déduire que sous les hypothèses de la question 2, le carré $ABCD$ est direct, c'est à dire que $r'(A) = B$.

✻ Ex. 540. ———— *4 points.* *./1990/parisC/exo-2/texte.tex*

$ABCDA'B'C'D'$ est un cube.



On note :

- s_1 la réflexion de plan $(AA'BB')$;
- s_2 la réflexion de plan $(BB'CC')$;
- s_3 la réflexion de plan $(CC'DD')$;
- s_4 la réflexion de plan $(DD'AA')$.

1° a) Montrer que $r' = s_2 \circ s_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.

b) Déterminer de même la nature de $r'' = s_4 \circ s_3$.

2° On note s la réflexion de plan $(BB'DD')$.

Déterminer les réflexions s' et s'' telles que :

$$r' = s \circ s' \qquad \text{et} \qquad r'' = s'' \circ s.$$

3° En déduire que $t = r'' \circ r'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BD}$.

V. POlynésie, série C & E

✻ Ex. 541. 5 points. ./1990/polynesieCE/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \sin \pi x.$$

1° a) Tracer la courbe représentative C de f (unité graphique 8 cm).

b) Calculer :

$$I = \int_0^1 \sin \pi x \,\mathrm{d}x.$$

c) Interpréter graphiquement cette intégrale.

2° Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

a) Interpréter graphiquement S_n, en introduisant les rectangles R_k de base $\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Faire la figure lorsque $n = 8$.

b) Prouver que :

$$1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{(n-1)\mathrm{i}\pi}{n}} = \frac{2}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}}.$$

c) En déduire que :

$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

d) Prouver finalement que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}.$$

3° Comparer les résultats des questions 1 et 2 et interpréter graphiquement.

VI. Sujet national remplacement, série C

Ex. 542. ./1990/nationalremC/exo-1/texte.tex

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R>0$ et le point A de $\mathscr{C}$ d'affixe R.

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

On considère la suite des points $(M_k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathscr{C}$ défini par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$.

On note z_k l'affixe de M_k.

1° a) Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k.

b) En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n.

c) Comparer M_n et M_0.

d) Faire une figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).

2° a) Prouver que, pour tout $k \geqslant 0$, $M_kM_{k+1} = 2R\sin\dfrac{\pi}{n}$.

b) On note $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$ le périmètre du polygone régulier $(M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n)$.
Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

Chapitre 31

1991.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

– groupe II : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

I. Groupe I, série C

Ex. 543. *4 points.* *./1991/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 2.
Soit φ l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe Z associe le point $M' = \varphi(M)$ d'affixe Z' défini par :

$$Z' = \frac{3+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}Z + \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

1° Déterminer :

a) l'affixe de l'image $\varphi(A)$ du point A,

b) l'affixe du point P tel que $\varphi(P) = O$.

2° Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ (on pourra utiliser les résultats de la question 1.).

3° Lorsque le point M est distinct du point A :

a) démontrer que le triangle AMM', où $M' = \varphi(M)$, est rectangle en M'.

b) Le point M et le milieu du segment $[AM]$ étant donné, en déduire une construction au compas du point M'.

Ex. 544. *4 points.* *./1991/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit (C) la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \\ y = 2\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

où le réel t décrit $\mathbb{R}$.

1° Soit $M(a\ ;\ b)$ un point de (C).

a) Donner, en fonction de a et b les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente en M à (C).

b) Soit N le point de coordonnées $(b\ ;\ a)$ et T le point défini par :

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OT}.$$

Montrer que la droite (MT) est la tangente en M à (C).

2° a) Montrer que la courbe (C) est contenue dans l'hyperbole (H) d'équation : $x^2 - y^2 = 8$.

b) Tracer l'hyperbole (H) et préciser ses éléments caractéristiques suivants : centre, sommets, foyers, asymptotes.

II. Groupe II, serie C

Ex. 545. ./1991/amiensC/exo-1/texte.tex

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Au point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, pù x et y sont réels, on fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z^2 + 2z$.

1° a) Calculer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point M.

b) Montrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.
Tracer (H).

2° Soit Ω le point d'affixe -1.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'\Omega$ soit un parallélogramme.

III. Groupe III, série C

Ex. 546. ./1991/besanconC/exo-1/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère une carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Soit E le milieu du segment [CD]. On considère le carré DEFG de centre O' tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DG}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure soigné avec AB=6 cm.
2. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
   1. Déterminer les éléments caractéristiques de s. Préciser l'image e E par s. En déduire l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BF}}\right)$.
   2. On note Γ

IV. Groupe IV, série C

Ex. 547. ./1991/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Soient les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1° Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

2° En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3° On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2.$$

a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

b) Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

V. Amérique du Nord, série C

✫Problème 148

./1991/ameriquedunordC/pb/texte

A- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1° a) Étudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 5 cm).

2° Calculer,en cm^2, l'aire du domaine plan Δ compris entre la courbe (C) l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. *On pourra faire une intégration par parties.*

3° Pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose :

$$g(x) = f(\sin x).$$

Montrer que la fonction g est une primitive sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction h telle que $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

B- Dans la suite du problème, a désigne un nombre réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t}\,dt.$$

1° Montrer que $0 \leqslant I_n(a) \leqslant a\dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

2° En déduire le limite de $I_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C- Pour tout entier n entier supérieur ou égal à 1, on définit sur $[0\,;a]$ la fonction F_n par :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5}{5} + \cdots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

a) Montrer que F_n est dérivable sur $[0\,;a]$ et que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;a]$:

$$F_n'(t) = \frac{1-\sin^{2n} t}{\cos t}.$$

Calculer $F_n(0)$.

b) En intégrant le relation précédente entre 0 et a, montrer que :

$$F_n(a) = g(a) - I_n(a).$$

En déduire la limite de $F_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

c) On considère alors la suite u définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}.$$

i. Montrer, en utilisant Cb et B1, que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_n est une valeur approchée de

$$\ln\sqrt{3} \quad \text{a} \quad \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{près par défaut.}$$

ii. En déduire, sous forme de fraction irréductible, une valeur approchée de $\ln\sqrt{3}$ à 10^{-2} près par défaut.

Retour page 1

VI. Maroc Sénégal Gabon Djibouti, série C

✱ Ex. 548. ———— *6 points.* *./1991/marocC/exo-1/texte.tex*

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives 1, i, −1, −i. Soit M le points d'affixe z.

1° Exprimer en fonction de z le nombre réel :

$$p = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB} \times \mathrm{MC} \times \mathrm{MD}.$$

2° On suppose que $r = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Donner une relation entre r et θ nécessaire et suffisante pour que $p = 1$.

3° Chercher les affixes des points M de l'axe des réels solutions de $p = 1$.
Donner sous forme trigonométrique les affixes des points M du cercle trigonométrique tels que $p = 1$.

VII. Orléans Tours, série D

☆Problème 149

./1991/orleansD/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 4$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$ avec comme unité le centimètre.

Partie I.

On considère la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x non nul par

$$f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1° a) Déterminer le sens de variation de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$, on notera α la solution.

2° Donner alors le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

3° a) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 4x^2$.

b) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

4° a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse a où a est un nombre réel non nul.

b) Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a avec $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$, et soit (T) la tangente en ce point à $\mathscr{C}$.
On note K le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées, et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
Montrer que l'aire du trapèze $OHMK$ est indépendante de la position du point M.

Partie II.

On considère la fonction numérique g définie pour tout nombre réel non nul par

$$g(x) = \frac{4}{3}x^3 + \ln|x|.$$

On désigne par Γ la courbe représentative de g.

1° a) Déterminer le sens de variation de g.

b) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer la valeur **exacte** $g(\alpha)$ où x_0 est la valeur définie dans la partie I.

2° Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $g(x) < 0$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution notée β dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
Donner, en la justifiant, une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

3° Construire Γ.

4° On s'aidant d'une intégration par parties, calculer

$$\int_1^{\frac{3}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire l'aire (en cm^2) de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$.

Chapitre 32

1992.

Sommaire

I. Japon, série C

Ex. 549. ./1992/japonC/exo-1/texte.tex

On considère dans l'ensemble GC des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$(1+\mathrm{i}z)^n = (1-\mathrm{i}z)^n \qquad \text{(E)}$$

n désignant un entier naturel supérieur où égal à 2.

1. a) Montrer que pour toute solution z de l'équation E on a :

$$|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z|.$$

b) En déduire que si z est une solution de E, z est un nombre réel.

2. On rappelle que pour tout réel z, il existe un unique réel φ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z=\tan\varphi$. Exprimer en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ le complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$.

3. a) Montrer que z est solution de E si et seulement si φ est solution de :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\varphi}=1 \quad \text{avec} \quad \varphi\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[. \qquad \text{(E')}$$

b) On suppose désormais $n=6$. Résoudre l'équation E'. En déduire les solutions de l'équation E.

II. Paris, série C

Ex. 550. *4 points.* ./1992/parisC/exo-1/texte.tex

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3+z^2+2z-4=0$$

sachant que l'une de ses solutions est un nombre entier.

2° Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_1, M_2, M_3 et Ω d'affixes respectives $+1$, $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et -1.

Soit (E) l'ellipse de centre Ω passant par les points M_1 et M_2 ; son axe focal est l'axe des abscisses.

a) Trouver les foyers, les directrices associées et l'excentricité de (E).

b) Déterminer une équation cartésienne de (E) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (E) et de l'axe des ordonnées. Tracer (E).

✻ Ex. 551. ________ *4 Points.* ./1992/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{modulo } 2\pi \text{ et } \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi.$$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1° Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1.
   b) Montrer que $\mathrm{S}_1(\mathrm{C}) = \mathrm{I}$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.

2° Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
   a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2.
   b) Soient M un point de (BI), M' son image par S_2. On suppose que M et M' sont distincts de I. Montrer que les quatre points (A, M, I, M') sont cocycliques.

✩Problème 150

./1992/parisC/pb/texte

Dans tout le problème n désigne *un entier naturel non nul*.
À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n.
On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

I. : Étude des fonctions f_n

1° Soit h_n la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Étudier le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$,déterminer le signe de h_n sur $]-1\,;\,+\infty[$.

2° a) Pour tout x appartenant à $]-1\,;\,+\infty[$ vérifier que :

$$f_1'(x) = h_1(x),$$

et que pour tout n strictement supérieur à 1,

$$f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x).$$

   b) On suppose n impair. Pour tout x appartenant à $]-1\,;\,+\infty[$ justifier que $f_n'(x)x$ et $h_n(x)$ sont de même signe. Dresser alors le tableau de variations de la fonction f_n, lorsque n est impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.
   c) On suppose n pair. Dressez de même le tableau de variations de f_n lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3° a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   b) Tracer ces deux courbes.

II. : Étude d'une suite

Dans cette partie, U désigne la suite de terme général U_n définie pour tout n entier naturel non nul par :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

1° Étude de la convergence
   a) Démontrer que :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

b) En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.

c) À l'aide de l'encadrement obtenu au **a.**, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{100}.$$

2° Calcul de U_1

a) En remarquant que pour tout x appartenant à $[0\,;1]$ on a

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

calculer

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x.$$

b) Calculer U_1 au moyen d'une intégration par parties.

3° Calcul de U_n

k=n Pour tout x de $[0\,;1]$ et pour tout $n \geqslant 2$,on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n \quad (1)$$

a) Démontrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad [2].$$

b) En utilisant successivement les expressions (1) et (2) de $S_n(x)$,montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

c) En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots d + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

4° *Application*

Soit E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x).$$

Calculer U_2 et en déduire l'aire de E en cm^2.

Chapitre 33

1993.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

– groupe II : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

I. Groupe I, série C

✻ Ex. 552. ———— *4 points.* *./1993/groupe1C/exo-2/texte.tex*

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit (E) la conique d'équation $16x^2 + 25y^2 = 400$.

1° Préciser la nature de (E), son centre, ses foyers et ses sommets, puis tracer la conique (E).

2° Le réel θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$, soit M le point du cercle de centre O et de rayon 5, de coordonnées $(5\cos\theta\ ;\ 5\sin\theta)$.

N est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Au point M on associe le point R de la conique (E) qui a même abscisse que M et dont l'ordonnée a même signe que celle de M.

Puis au point N on associe le point S de la conique (E) qui a même abscisse que N et dont l'ordonnée a même signe que celle de N.

a) Donner les coordonnées de N, R et S.

b) Vérifier que $OR^2 + OS^2 = 41$.

c) Calculer l'aire du triangle ORS.

II. Groupe II, série C

✻ Ex. 553. ———— *4 points.* *./1993/groupe2C/exo-1/texte.tex*

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre boules vertes et deux boules jaunes.

1° On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules vertes tirées.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

2° On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, **les boules n'étant pas remise dans l'urne**.

On note A, B, C, D les événements suivants :

– A : aucune boule verte n'est tirée au cours du **premier** tirage de deux boules.

– B : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du **premier** tirage de deux boules.

– C : deux boules vertes sont tirées au cours du **premier** tirage de deux boules.

– D : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du **deuxième** tirage de deux boules.

a) Calculer :
$p(D|A)$ (Probabilité conditionnelle de D sachant que A est réalisé)
$p(D|B)$ (Probabilité conditionnelle de D sachant que B est réalisé)
$p(D|C)$ (Probabilité conditionnelle de D sachant que C est réalisé).

b) En déduire les probabilités des événements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$.

c) Calculer la probabilité de l'événement D.

✻ Ex. 554. ____________ *4 points.* *./1993/groupe2C/exo-2/texte.tex*

Une unité de longueur a été choisie. On demande de faire une figure.
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de $[AC]$ et D est le point défini par la relation

$$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.$$

1° Démontrer que D est le barycentre du système

$$\{(A,\ 3);(B,\ -2);(C,\ 3)\}.$$

En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.

2° Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$.

3° Calculer DA^2 et DB^2.

4° Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M vérifiant la relation

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12.$$

Vérifier que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à $(\mathscr{E})$.
Tracer $(\mathscr{E})$.

☆**Problème 151** *12 points.* *./1993/groupe2C/pb-1/texte*

La partie C est indépendante de la partie B du problème.

Partie A.

1° Étudier sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ le sens de variation de la fonction h_1 définie par

$$h_1(x) = x - \ln x.$$

Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a

$$h_1(x) > 0.$$

On définit alors sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction f_1 par

$$f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}.$$

2° Étudier le sens de variation de la fonction f_1.
Déterminer les limites de f_1 aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Dresser le tableau de variations.

3° On considère la fonction φ_1 définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x) \qquad \text{pour } x \in\,]0\,;+\infty[\end{cases}.$$

Montrer que φ_1 prolonge f_1 par continuité.
Étudier la dérivabilité de φ_1 en 0.

Partie B.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur où égal à 2.

1° Étudier sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ le sens de variation de la fonction h_n définie par

$$h_n(x) = x^n - \ln x.$$

En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a : $h_n(x) > 0$.
On définit alors sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction f_n par

$$f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}.$$

2° On définit sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction g_n par

$$g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x.$$

Montrer que g_n est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
En déduire l'existence d'un réel unique a_n tel que : $g_n(a_n) = 0$.
Comparer a_n et 1. Quelle est la valeur de a_2 ?

3° a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a

$$f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}.$$

En déduire le sens de variation de f_n.

b) Préciser les limites de f_n aux bornes de $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de f_n.

4° a) En vous aidant la la question (3) de la partie A., montrer que f_n admet un prolongement par continuité φ_n dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

b) Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_2$ de φ_2 dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

Partie C

Calcul approché de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles.

1° En utilisant la question A.1, déterminer lorsque x appartient à l'intervalle $[1\,;3]$, un encadrement de $x - \ln x$. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\,;3]$, on a

$$\left|f_1'(x)\right| \leqslant 1. \qquad (1)$$

2° On considère deux nombres réels α et β tels que $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ et on pose

$$A = \int_\alpha^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_\alpha^\beta f_1(\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

a) En utilisant la relation (1) et l'inégalité des accroissements finis, démontrer, que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$, on a

$$\alpha - x \leqslant f_1(x) - f_1(\alpha) \leqslant x - \alpha.$$

b) En déduire que

$$\int_\alpha^\beta (\alpha - x)\,\mathrm{d}x \leqslant A - J \leqslant \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

c) Montrer que

$$|A - J| \leqslant \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2.$$

Retour page 1

3° On partage l'intervalle [1 ; 3] en n intervalles de même longueur en utilisant les réels x_0, $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3.$$

On a donc
$x_{k+1-x_k} = \frac{2}{n}$ pour k appartenant à $\{0 ; 1 ; \dots ; n\}$.
On pose

$$A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x_k)\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer que

$$\left| \int_1^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x - (J_0 + J_1 + \cdots + J_{n-1}) \right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_1^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x$ à 10^{-1} près. On légitimera le choix de n.

Chapitre 34

1994.

Sommaire

I. Groupe 1, série C

Ex. 555. ./1994/groupe1C/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un nombre réel positif, on considère l'application F_a qui à tout point m d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe M_a d'affixe $Z_a = (z + \mathrm{i})(az - 1)$.

1° On donne $a = 0$, reconnaître l'application F_0.

2° On prend maintenant a strictement positif.

a) Déterminer les points ayant pour image par F_a le point O.

b) Calculer les coordonnées X_a et Y_a de M_a en fonction de x, y et a.

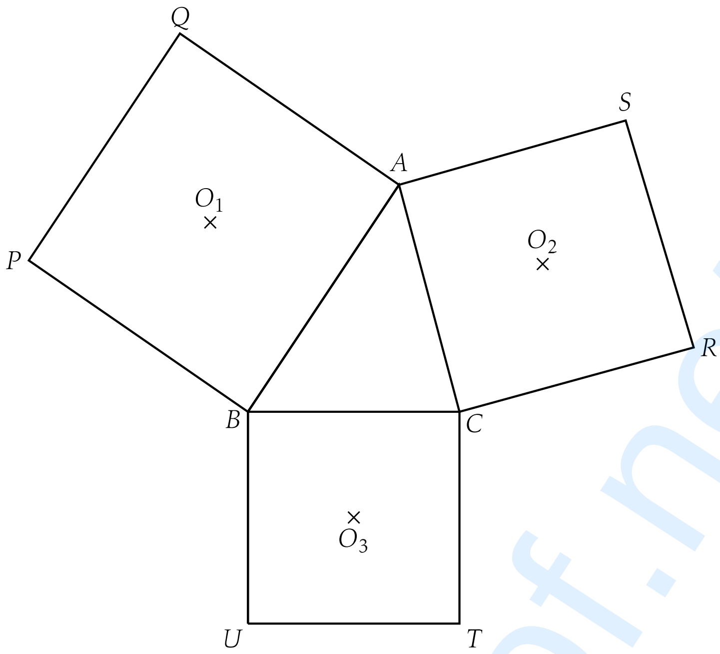
c) Pour $a \neq 1$, montrer que l'ensemble des points dont l'image est un point de l'axe imaginaire $(O, \vec{v})$ est une hyperbole.
Calculer son excentricité, les coordonnées de son centre et préciser, suivant les valeurs de a, son axe focal.

3° Faire une figure correspondant à $a = \dfrac{1}{2}$.

II. Groupe 3, série C

Ex. 556. ./1994/groupe3C/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, non rectangle, de sens direct. À l'extérieur du triangle, conformément à la figure, on trace les carrés $AQPB$, $ACRS$ et $BUTC$ de centres respectifs O_1, O_2 et O_3
On appelle $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles circonscrits aux carrés $AQPB$ et $ACRS$.
Enfin on note par I le milieu du segment $[BC]$.



Les trois questions sont indépendantes. Chacune vise à établir une propriété de la configuration.

1° Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en A et en un second point A'. Montrer que le point A' est sur le cercle de diamètre $[BC]$. (On pourra utiliser les propriétés angulaires relatives aux points cocycliques).

2° Soient r_1 et r_2 les rotations de centres O_1 et O_2, et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Quelle est la nature de $r_2 \circ r_1$?

b) Quelle est l'image de B par $r_2 \circ r_1$?

c) En déduire déduire les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.

d) Montrer que le triangle IO_1O_2 est rectangle et isocèle.

3° a) Quelle est l'image du triangle ABO_3 par la similitude directe de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

b) Déterminer une similitude directe dans laquelle le triangle AO_1O_2 ait pour image le triangle AQC.

c) Prouver que les segments $[AO_3]$ et $[O_1O_2]$ sont orthogonaux et de même longueur.

III. Groupe 4, série D

✩Problème 152

./1994/groupe4D/pb/texte

On considère la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x}$, et on note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1cm) .

Partie A

1° Étudier les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2° Former le tableau des variations de f .

Retour page 1

3° Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse nulle .

4° Démontrer que f est une fonction impaire .

5° Construire (C) et (T) dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

1° Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$$

On donnera le résultat sous d'un logarithme népérien d'un quotient.

2° Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 4 - \dfrac{8e^x}{1+e^x}$.

3° Déduire des questions précédentes l'aire, en cm^2, de la partie de la courbe comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations :

$$x = -3 \quad \text{et} \quad x = 0.$$

Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire .

4. On considère ici la région du plan comprise entre la courbe (C) , la droite (T) et les droites d'équations : $x = -3$ et $x = 0$. Calculer,en cm^2, l'aire de cette région.
Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie C

Résolution de l'équation $f(x) = \alpha$ où α est un nombre réel donné.

1° En utilisant les résultats de la partie 152, montrer que, si α n'appartient pas à l'intervalle $]-4\,;4[$, l'équation n'a pas de solution.

2° On suppose désormais que $-4 < \alpha < 4.$.

a) Démontrer qu'il existe une solution et une seule pour cette équation.

b) Pour $\alpha = 2$, exprimer cette solution à l'aide d'un logarithme népérien .

c) Pour αquelconque appartenant à l'intervalle $]-4\,;4[$, exprimer cette solution en fonction de α.

Partie D

On se propose d'étudier l'existence des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)+x = 0$.

1° Á partir de la représentation graphique de f, indiquer le nombre de solutions de cette équation.

2° Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)+x$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, on a :

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x+1)^2}.$$

b) En déduire les variations de φ. (On pourra commencer par résoudre l'équation $X^2 - 6X + 1 = 0$.)

c) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

3° a) Á partir des résultats précédents, déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x)+x = 0$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Retrouver ainsi, de manière rigoureuse, les résultats trouvés à la question 1

Chapitre 35

1995.

Sommaire

I. National, série S

✻ Ex. 557. ./1995/nationalS/exo-1/texte.tex

1° Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

2° Soit K, L, M les points d'affixes respectives :

$$z_K = 1 + \mathrm{i};\ z_L = 1 - \mathrm{i};\ z_M = -\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ d'unité graphique 4 cm.
On complétera la figure dans les questions suivante.

3° a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L.
Vérifier que l'affixe z_N du point N est $2 + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 2)$.

b) La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.
Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.

c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2\mathrm{i}$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B.
Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.

4° a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

b) Montrer que $\dfrac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \mathrm{i}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

✻ Ex. 558. *Obligatoire.* ./1995/nationalS/exo-2/texte.tex

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}},\ J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x,\ K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

1° Calculons I : soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) Calculer Calculer la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.

b) En déduire la dérivée f' de f.

c) calculer alors I.

2° Calcul de J et de K.

a) Sans calculer explicitement J et K, montrer que $J + 2I = K$.

b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$

c) En déduire les valeurs de J et de K.

✻ Ex. 559. ———— *Spécialité.* *./1995/nationalS/exo-3/texte.tex*

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et, pour } n \geqslant 1n \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

1° a) Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0.

b) Calculer u_1.

2° a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ on a :

$$1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{1}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

3° Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$u_n + u_{n-2} = I_n.$$

Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-1} = \sqrt{2}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$(2n-1)u_n \leqslant \sqrt{2}. \tag{2}$$

c) Á l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

II. Polynésie, série S

✻ Ex. 560. ———— *4 points.* *./1995/polynesieS/exo-1/texte.tex*

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1.$$

1° a) Calculer $P(1)$.

b) En déduire l'existence de trois nombres réels a, b, c tels que :

$$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c).$$

Déterminer a, b, c.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2° On considère trois nombres complexes :

$$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = -\sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha \quad ; \quad z_3 = -\sin\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha.$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

✰PROBLÈME 153 *12 points* *./1995/polynesieS/pb/texte*

Le but du problème est d'étudier, dans un premier temps (partie 153) , la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \quad \text{et } f(0) = \frac{1}{2}$$

puis (partie 153) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2cm. On désigne par C la courbe représentative de f dans ce repère .

I- **Étude d'une fonction auxiliaire.** Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

1° a) Étudier le sens de variation de g.

b) . Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

2° Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2\,;3]$, on a $g(x) < \frac{1}{2}$.

3° 1° Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $x = \frac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en $x = 0$.

2° La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$? Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3° Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f'(x) = g(x)$).

4° a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$).

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

5° Tracer dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la droite Δ, la courbe C et la droite d'équation $y = x$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2\,;3]$.

I- 1° Soit h la fonction définie sur Ipar $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout x de I, $h'(x) < 0$ (on remarquera que $h'(x) = g'(x) - 1$).

2° En déduire le sens de variation de $h$et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I ; on note α cette solution.

II- 1° Montrer que pour tout x de I, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

2° En déduire que, pour tout x de I, $|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

.

III- On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que pour tout n de IN, u_n appartient à l'intervalle I.

a) Établir les inégalités suivantes :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \tag{1}$$

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{2}$$

b) En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

c) Déterminer n_0 entier naturel tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. En déduire alors une approximation de α à 10^{-3} près.

Retour page 1

Chapitre 36

1996.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

– groupe II : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

De plus le groupe I bis correspond aux groupes I & IV, et le groupe II bis aux groupes II & III.

I. Antilles, série S

Ex. 561. *4 points.* ./1996/antillesS/exo-1/texte.tex

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1° On extrait simultanément trois boules de cette urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire « Nombre de boules blanches tirées parmi les trois boules extraites ».
Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart type.

2° On extrait successivement trois boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite de l'urne.
On suppose tous les tirages équiprobables.
Soit Y la variable aléatoire « Nombre de tirages où apparaît une boule blanche ».
Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

Ex. 562. *6 points obligatoire.* ./1996/antillesS/exo-2/texte.tex

1° On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0. \qquad \text{(E)}$$

a) Vérifier que 8 est solution de cette équation.
Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que, pour tout nombre complexe Z :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z-8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma).$$

b) Résoudre alors l'équation (E)

2° $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan orienté (unité : 1 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 - 2i\sqrt{3}, \; b = 2 + 2i\sqrt{3}, \text{ et } c = 8.$$

a) Calculer le module de a, $|a|$ et donner un argument de a.

b) Calculer le nombre complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument φ. En déduire, la nature du triangle ABC.

c) Déterminer le barycentre D des points pondérés $(A, |a|)$, $(B, |b|)$, $(C, |c|)$.
Placer D.

d) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|vecteurMA+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|.$$

Tracer Γ.

II. Groupe I bis, série S

Ex. 563. ——— *4 points.* *./1996/groupeIbis/exo-1/texte.tex*

Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport.
N.B- Si E est un événement, on notera $P(\mathrm{E})$ sa probabilité et $\overline{\mathrm{E}}$ l'événement contraire.
Si E et F sont deux événements, $P(\mathrm{E}_{|\mathrm{F}})$ est la probabilité de « E sachant que F est réalisé ».

1° On demande à trois inscrits choisis au hasard de remplir un questionnaire.
Calculer les probabilités des événements suivants :

a) A : « les sportifs choisis pratiquent tous l'athlétisme » ;

b) B : « les sportifs choisis pratiquent tous le même sport ».

2° Parmi les inscrits en natation, 45% sont des filles. De même 20% des inscrits en athlétisme et 68% des inscrits en gymnastique sont des filles.

a) On choisit un inscrit au hasard.
Quelle est la probabilité p_1 que l'inscrit choisi soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
Quelle est la probabilité p_2 que ce soit une fille ?

b) Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité p_3 qu'elle pratique l'athlétisme ?

Ex. 564. ——— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1996/groupeIbis/exo-2/texte.tex*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 4 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$$a = 1-\mathrm{i}, \qquad b = 1+\mathrm{i}, \qquad c = -1+\mathrm{i} = -a.$$

On note Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

1° a) Placer sur une figure les points A, B, C et Γ.

b) Mettre les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique.

c) Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$. Déterminer l'angle de r et le point $r(B)$, image de B par r.

d) Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par r ; placer Γ' sur la figure.

2° On considère $\theta \in]0\,;2\pi[$ distinct de π ; on note M la point d'affixe $z = 1+\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}$.
On désigne par M' l'image de M par r, et on appelle z' l'affixe de M'.

a) Montrer que M est un point de Γ distinct de A et de B.

b) Exprimer z' en fonction de z.
Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

c) Établir la relation $u = u' \tan\dfrac{\theta}{2}$.

d) Prouver que les points B, M et M' sont alignés. Placer sur la même figure un point M et son transformé M'.

✻Ex. 565. ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* ./1996/groupeIbis/exo-3/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle te rectangle avec $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure, que l'on complètera en traitant les questions, on prendra $AB = 5$ cm.

1° On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On pose $f = r_C \circ r_A$.

a) Déterminer les images par f de A et de B.

b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$?

2° Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B.
On appelle C' l'image de C par s, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par s.

a) Déterminer une mesure de l'angle de s.
Montrer que C' appartient à la droite (OA).

b) Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.

c) Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB).
En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

✩**Problème 154** *11 points.* ./1996/groupeIbis/pb/texte

L'objet de ce problème est :

– d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}\ ;$$

– de justifier *rigoureusement* le tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 5 cm.

– de détailler enfin certaines propriétés d'une suite de nombres réels construite à partir de f.

Partie A - Questions préliminaires

1° Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

b) Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$.

2° Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $h(x) = (2-x)e^x - 1$

a) Étudier la fonction h et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, α, et que $\alpha > 1$.

c) Vérifier la double inégalité $1{,}84 < \alpha < 1{,}85$.

d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x \geqslant 0$, le signe de $h(x)$.

Partie B - Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathscr{C}$

1° a) Justifier que f est bien définie en tout point de $x \in [0\,;+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; interpréter géométriquement, relativement à $\mathscr{C}$, le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

Retour page 1

d) Étudier la fonction f et dresser son tableau de variation.

2° a) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x \geqslant 0$, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

3° a) Préciser la tangente au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

b) Tracer $\mathscr{C}$, en faisant figurer sur le dessin la droite Δ d'équation $y = 1$ et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

Partie C - Étude de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^n [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$

1° Déterminer une primitive de la fonction f. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

2° Interpréter géométriquement le nombre réel $-u_1$.

3° Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ (on pourra utiliser l'égalité $n = \ln(e^n)$).

4° Interpréter géométriquement le nombre réel $u_n - u_1$ puis le résultat obtenu dans la question précédente.

III. Groupe II bis, série S

Ex. 566. *4 points.* *./1996/groupeIIbis/exo-1/texte.tex*

On dispose de deux urnes :

– une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;

– une urne U_2 dans laquelle il y a deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1° Montrer que la probabilité de l'événement E : « Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches » est égale à 0,46.

2° On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer le loi de probabilité de X.

b) Le joueur doit verser 2,50 F avant d'effectuer le tirage : il reçoit à l'issue du tirage, 1 F par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable ?

3° Calculer la probabilité de tirer une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré deux boules blanches.

4° On ne considère que l'urne U_1, dans laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches.

On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne).

Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

Ex. 567. *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1996/groupeIIbis/exo-2/texte.tex*

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -2\mathrm{i}, \qquad z_B = 4 - 2\mathrm{i}, \qquad z_C = 4 + 2\mathrm{i}, \qquad z_D = 1.$$

1° a) Placer les points A, B, C et D sur une figure, qui sera peu à peu complétée. On prendra pour unité graphique 2 cm.

b) Préciser la nature du triangle ABC.

2° On désigne par F l'application qui, à tout point M de P d'affixe z et distinct de A, associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{z - (4 + 2\mathrm{i})}{z + 2\mathrm{i}}.$$

Retour page 1

a) Déterminer les images de B et C par F.

b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$. Construire E.

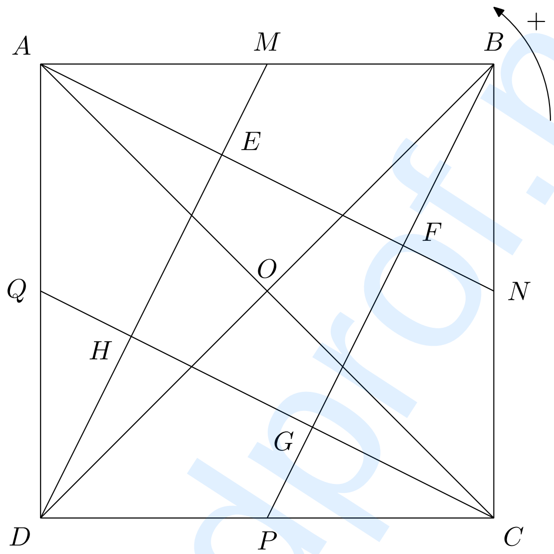
3° a) Montrer que, pour tout nombre complexe z distinct de $-2i$, on a :

$$(z'-1)(z+2i) = -4-4i.$$

b) Montrer que, pour tout point M distinct de A, et dont l'image par F est notée M', on a :

$$\begin{cases} M' \neq D \\ DM'.AM = 4\sqrt{2} \\ \left(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{DM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}}\right) = \dfrac{5\pi}{4} \quad (mod\ 2\pi). \end{cases}$$

✻ Ex. 568. ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* ./1996/groupeIIbis/exo-3/texte.tex



Dans le plan orienté on considère la figure ci-dessus.
$ABCD$ est un carré de centre 0 et tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{2}$.
Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère $EFGH$ est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré $ABCD$.
Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.

1° On se propose de *démontrer* que EFG est un carré.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image par r du point N, puis celle du segment $[AN]$.
Déterminer l'image par r du point P, puis celle du segment $[BP]$. En déduire $r(F)$ et la nature du triangle FOG.

b) Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.

2° Comparaison des aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.

a) Justifier les égalités $AE = EH = DH$ et $AE = 2QH$.

b) Soit K l'image de H par la symétrie s de centre Q.
Démontrer que $AEHK$ est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED.

c) En déduire le rapport des aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.

3° Généralisation de la question 1.
On suppose maintenant que les points M', N', P' et Q' vérifient respectivement les égalités :

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DQ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

On construit le quadrilatère $E'F'G'H'$ en traçant les droites (AN'), (BP'), (CQ') et (DM').
Que suffit-il de changer à la démonstration du 1. pour démontrer que $E'F'G'H'$ est un carré ?

✰Problème 155 *11 points.*

./1996/groupeIIbis/pb/texte

Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \qquad g(x) = f(x) + [f(x)]^2, \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie A- *Étude de la fonction f*

1° a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie B- *Étude de la fonction g*

1° Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$g'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)].$$

Étudier le sens de variation de g.

2° Déterminer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

3° Donner le tableau de variation de g. On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.

4° a) Établir que, pour tout réel x, on a :

$$g(x) - x = x\mathrm{e}^{-x}[1 + x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}].$$

b) Montrer que, pour tout x réel, on a :

$$1 + x\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 + x \leqslant \mathrm{e}^{x}.$$

c) Préciser la position de la courbe représentative Γ de la fonction g par rapport à sa tangente T en O.

5° Tracer Γ (on prendra pour unité 4 cm). Préciser las abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur le dessin la tangente T.

Partie C- *Étude de la fonction h*

1° Quelle est la dérivée de h ? Étudier le sens de variation de h.

2° Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

a) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.
Déterminer la limite de $I(x)$ en $+\infty$.

b) Á l'aide de deux intégrations par parties, calculer $J(x)$. Déterminer la limite de $J(x)$ en $+\infty$.

c) Expliciter $h(x)$ et déterminer la limite de $h(x)$ en $+\infty$.

Retour page 1

IV. Centres étrangers Groupe 1, série S

Ex. 569. *4 points.* *./1996/centresetS/exo-1/texte.tex*

1° a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel par :

$$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n,$$

avec pour condition initiale $u_1 = a$.

a) (v_n) est la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$v_n = 13u_n - 4.$$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.
Exprimer v_n en fonction de n et a.

b) Prouver que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2° Un professeur oublie fréquemment les clés des sa salle.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « le professeur oublie ses clés le jour n » et $\overline{\mathrm{E}}_n$ l'événement contraire.
p_n est la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}}_n$. On pose $p_1 = a$, la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour.
On suppose en outre qui les deux conditions suivantes sont réalisées :

– si le jour n, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est de $\frac{1}{10}$.

– si le jour n, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est de $\frac{4}{10}$.

a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n.$$

b) En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

c) Á l'aide des résultats de la question 1, donner l'expression de p_n en fonction de n et de a.
La limite p de la suite (p_n) dépend-t-elle de la condition initiale a ?

☆PROBLÈME 156 *11 points.* *./1996/centresetS/pb/texte*

Soit k un nombre réel. On considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f_k(0) = 0.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 10 cm).
On note I, J et L les points de coordonnées respectives $(1,0), (0,1)$ et $(1,1)$.

Partie I *Étude de fonction f_0*

Dans cette question $\boldsymbol{k = 0}$. Étude et représentation graphique de f_0.

1° Signe de la dérivée.

a) Calculer la dérivée f_0' de f_0 sur l'intervalle $]0\,;1]$ et montrer que $f_0'(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f_0'(x) = (\ln x)(\ln x + 2).$$

b) Déterminer les solutions de l'équation $f_0'(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.

c) Étudier le signe de $f_0'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.

Retour page 1

2° Étude à l'origine.

a) Déterminer la limite de $\frac{\ln u}{\sqrt{u}}$, puis de $\frac{(\ln u)^2}{u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

b) En déduire que $x(\ln x)^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0, en déduire que la fonction f_0 est continue en $x = 0$.

c) Déterminer la limite de $\frac{f_0(x)}{x}$ quand x tend vers 0.
En déduire la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_0$.

3° Tracé de la courbe $\mathscr{C}_0$.

a) Dresser le tableau des variations de f_0 sur $[0\,;1]$.

b) Construire $\mathscr{C}_0$.

Partie II -*Étude des fonctions* f_k.

1° Dérivée de f_k.

a) Calculer $f_k'(x)$ pour x dans l'intervalle $]0\,;1]$.

b) Soit A_k le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse 1. Montrer que la tangente en A_k à $\mathscr{C}_k$ est la droite $(OA_k.)$

2° Étude en l'origine.

a) Établir que f_k est continue en 0.

b) Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_k$ en O.
On ne demande pas d'étudier f_k.

Partie III *Étude et représentation graphique de* f_1 *et* $f_{\frac{1}{2}}$.

1° Étude et représentation graphique de f_1.

a) Prouver que pour tout $x \in]0\,;1]$, $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.

b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

c) Établir le tableau de variation de f_1 et tracer $\mathscr{C}_1$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_0$ en précisant le coefficient directeur de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_1$ au point A_1.

2° Étude et représentation graphique de $f_{\frac{1}{2}}$.

a) Prouver que pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}.$$

b) En déduire une construction de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ à partir de $\mathscr{C}_0$ et C_1 et tracer $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ en précisant la tangente $T_{\frac{1}{2}}$ à $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ au point $A_{\frac{1}{2}}$.

Partie IV *Partage du carré OILJ en quatre carré de même aire.*
Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$.

1° Calcul d'une intégrale.

On pose $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a) Prouver, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \int_\alpha^1 x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

b) Á l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Retour page 1

c) Déterminer la limite I de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0.

d) Justifier le fait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$ existe.

Que vaut, d'après-vous cette intégrale ? *Ce résultat ne sera pas démontré !*

2° Calcul d'aires.

a) On pose $S_k(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de α. En déduire la limite S_k de $S_k(\alpha)$ quand α tend vers 0.
On admettra que cette limite représente l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_k$, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$.

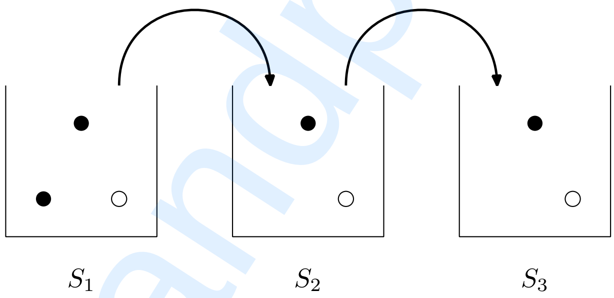
b) En déduire que les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathscr{C}_1$ partagent le carré $OILJ$ en quatre parties de même aire.

V. Amérique du Nord, série S

Ex. 570. *4 Points.* *./1996/ameriquenordS/exo-1/texte.tex*

On désigne par n un entier naturel supérieur où égal à 2. On imagine n sacs de jetons $S_1, \ldots, S_n$. Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et un jeton blanc, et chacun des autres sacs contient un jeton noir et un jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard un jeton dans S_1.
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire au hasard un jeton de S_2.
- Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire au hasard un jeton de S_3 … et ainsi de suite….



Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'événement « le jeton sorti de S_k est blanc », et $\overline{E}_k$ l'événement contraire.

1° a) Déterminer le probabilité de E_1, notée $p(E_1)$, et les probabilités conditionnelles $p_{E_1}(E_2)$ et $p_{\overline{E}_1}(E_2)$.

En déduire la probabilité de E_2, notée $p(E_2)$.

b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de E_k est notée p_k.

Justifier alors le relation suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$$

2° **Étude d'une suite** (u_k).

On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout entier naturel $k \geqslant 1$:

$$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}.$$

a) On considère la suite (v_k) définie pour tout élément k de $\mathbb{N}^\star$, par :

$$v_k = u_k - \frac{1}{2}.$$

Démontrer que la suite (v_k) est géométrique.

b) En déduire l'expression de u_k en fonction de k. Déterminer la limite de la suite (u_k).

3° Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
Déterminer pour quelles valeurs de k on a :

$$0{,}499\,9 \leqslant p_k \leqslant 0{,}5.$$

VI. Pondichéry, série S

Ex. 571. *4 points, spécialité* ./1996/pondicheryS/exo-3/texte.tex

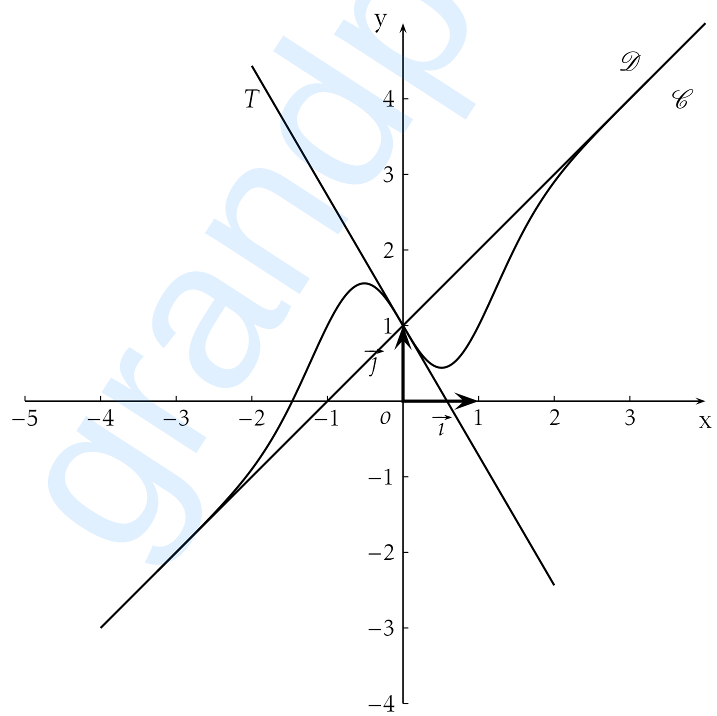
Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1+\mathrm{i})z - 3 + 3\mathrm{i}|^2 + |z-6|^2 = 54.$$

1°

Problème 157 *12 points.* ./1996/pondicheryS/pb/texte

Sur la figure ci-dessus, sont représentées la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans une repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote $\mathscr{D}$ et sa tangente T au point d'abscisse 0.



On sait que le point $J(0\ ;\ 1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ et que l'asymptote $\mathscr{D}$ passe par les points $K(-1\ ;\ 0)$ et J, et que la tangente T a pour équation réduite $y = (1-\mathrm{e})x + 1$.

Partie A *–Expression de f–*

1° Déterminer une équation de $\mathscr{D}$.

2° On suppose qu'il existe des réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel, $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

a) Déterminer m et p.

b) Démontrer que pour tout x réel, $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire que la fonction φ est impaire puis que la fonction f', dérivée de f, est paire.

3° On suppose maintenant que, pour tout x réel :

$\varphi(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

Démontrer en utilisant les données et les résultats précédents que $a = -\mathrm{e}$ et que $b = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + x - x\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° a) Vérifier que pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

Calculer $f'(0)$.

b) Vérifier que T est bien la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ vis à vis de sa tangente T.

2° Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

a) Démontrer que $f''(x)$ est du signe de $6x - 4x^3$.

b) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α unique dans l'intervalle $[0\,;1]$.

c) Montrer que $0,51 < \alpha < 0,52$.

d) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Partie C

Sur le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ est très proche de son asymptote pour les points d'abscisses supérieure à 2,4.
Cette partie propose de préciser cette situation en calculant, pour tout réel λ positif ou nul, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1° Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

2° Déterminer la limite A de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

3° Á partir de quelle valeur de λ a-t-on $|\mathscr{A}(\lambda) - \mathrm{A}| \leqslant 10^{-2}$?

Chapitre 37

1997.

Sommaire

On a ici les regroupements suivants :

– groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

– groupe II : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

– groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

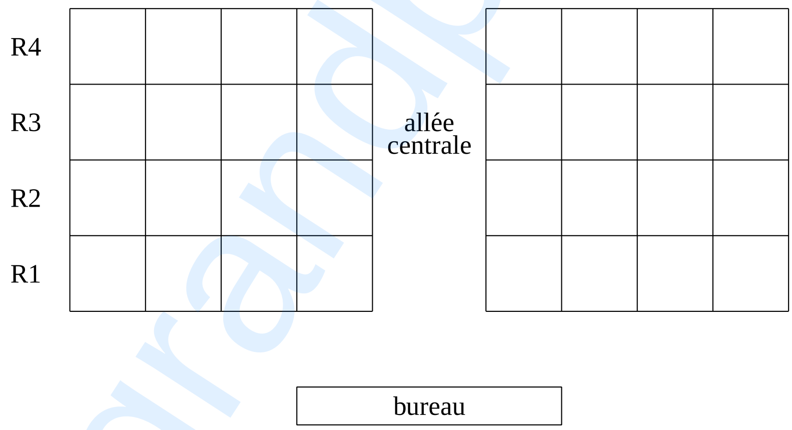
– groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

De plus le groupe I bis correspond aux groupes I & IV, et le groupe II bis aux groupes II & III.

I. Antilles, série S

✲ Ex. 572. ———— *4 points.* *./1997/antillesS/exo-1/texte.tex*

Voici le plan de la salle 308 du lycée Dupont.



Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la classe de TS1 sont invités par leur professeur principal à s'installer au hasard des places disponibles dans cette salle. La classe de TS1 comporte 28 élèves.

1° a) Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées ?

b) Calculer à 10^{-1} près, les probabilités des événements suivants :

A : « les huit places du rang R4 sont toutes occupées » ;

B : « il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale ».

2° Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire. Soit X la variable aléatoire « nombre de places inoccupées au rang R4 ».

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique.

Ex. 573. *5 points, obligatoire.* ./1997/antillesS/exo-2/texte.tex

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique est 1 cm. On considère les points A, B et C, d'affixes respectives :

$$z_A = (3\sqrt{3}-2)+\mathrm{i}(3+2\sqrt{3})\ ;\ z_B = (-\sqrt{3}-1)+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)\ ;\ z_C = (1-4\sqrt{3})+\mathrm{i}(-4-\sqrt{3}).$$

1° On se propose de placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ à l'aide d'un compas. Pour cela on considère la rotation $\mathscr{R}$ de centre O et d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

a) Donner l'écriture complexe de $\mathscr{R}$.

b) Vérifier que $\mathscr{R}$ transforme le point A en le point A' d'affixe $4-6\mathrm{i}$.
On admettra que $\mathscr{R}$ transforme les points B et C en les points B' et C' d'affixes respectives $2+2ß$ et $-2+8ß$.

c) Placer les points A', B' et C', puis à l'aide du compas, les points A, B, C. (La construction de A sera justifiée).

2° a) Calculer $z_A - z_B + z_C$.

b) En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.

3° Soit l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|.$$

a) Vérifier que B appartient à $\mathscr{C}$.

b) Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{C}$.

4° Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan tels que :

$$2\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|.$$

Ex. 574. *5 points, spécialité.* ./1997/antillesS/exo-3/texte.tex

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique est 1 cm.
On considère la courbe (C) d'équation :

$$7x^2+13y^2-6\sqrt{3}xy-30=0.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la nature et les éléments remarquables de la courbe (C) puis de la tracer.

1° On considère la transformation f du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (\sqrt{3}-\mathrm{i})z$.
Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2° Exprimer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M en fonction des coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de M'.

3° a) Montrer que (C') image de de la courbe (C) par la transformation f est, dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la courbe d'équation :

$$x^2+4y^2=36.$$

b) En déduire que (C') est une conique dont bon déterminera la nature et éléments caractéristiques (foyers, sommets, directrices). Tracer (C').

4° Déduire des questions précédentes la nature de la courbe (C) et la tracer.

☆Problème 158 *11 points.* ./1997/antillesS/pb/texte

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

1° Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.

2° Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

3° Donner le tableau des variations de la fonction f et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x$appartenant à $]0\,;+\infty[$.

Retour page 1

4° Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 5 cm. Tracer la courbe C représentative de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

1° Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie **??** le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.

2° Vérifier que $g = h \circ k$ avec h et k fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$par :

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad k(x) = \frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.

3° Donner le tableau des variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C

1° Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine « ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient : $1 \leqslant x \leqslant \lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ ». En utilisant les résultats de la partie **??** :

a) calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ ;

b) déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque l tend vers $+\infty$;

c) justifier l'affirmation : « L'équation $A(\lambda) = 5$ admet une solution unique notée λ_0 ». Puis donner un encadrement de λ_0 d'amplitude 10^{-2}.

2° Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^\star$ par : $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Montrer en remarquant que $\ln(u_n) = g(n)$, que :

a) la suite (u_n) est une suite croissante ;

b) la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

II. Asie, série S

✻ Ex. 575. ———— *5 points.* *./1997/asieS/exo-1/texte.tex*

1° Une urne contient deux boules blanches et n noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ». Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

2° Dans toute la suite du problème on prend $n = 4$.

A- *Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne* et on note :
A_0 l'événement : « le joueur a tiré deux boules noires » ;
A_1 l'événement : « le joueur a tiré une boule noire et une blanche » ;
A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

a) Calculer la probabilité des événements A_0 et A_1.

b) Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée. Soit X le nombre de points marqués.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Déterminer $E(X)$.

Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules. Soit B_i l'événement : « on obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » ($i = 0,\ 1$ ou 2).

B- *i.* Donner $p(B_0|A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$. Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$. En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.

ii. Montrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$. En déduire $p(B_1)$.

✻Ex. 576. ./1997/asieS/exo-2/texte.tex

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormal direct $(O\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

1° Soit le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4.$$

Déterminer les réels u et v tels que $P(z) = (z-2)(z^2 + uz + v)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2° On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α. Soit A, B et C les points d'affixes respectives α, β et 2, I le milieu de [AB] et $r$la rotation de centre O et d'angle α . Déterminer l'affixe du point $r(B)$ et en déduire la nature du quadrilatère $OACB$.

3° Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé du point C dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z ($z \neq 2$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z-(1+\mathrm{i})}{z-2}.$$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$. Déterminer le point E tel que $f(E) = C$.

b) Quelles distances représentent les réels $|z-(1+i)|$ et $|z-2|$? En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AC]$, M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

✻Ex. 577. *5 points, spécialité.* ./1997/asieS/exo-3/texte.tex

On considère (C) et (C′) deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons r et $2r$ tangents extérieurement en A, de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AA']$.
Soit M un point quelconque de (C), distinct de A et B, et M' un point de (C') tel que le triangle AMM' soit rectangle en A (on prendra pour la figure $r = 2$ cm).

1° a) Déterminer en justifiant les réponses :

- le rapport de l'homothétie h_1 de centre A qui transforme (C) en (C').
- le centre I de l'homothétie h_2 distincte de h_1 qui transforme (C) en (C').

Placer I sur la figure.

b) On note $M_1 = h_1(M)$.
Montrer que le point M_1 est le point de (C') diamétralement opposé à M'.
Déterminer $h_2(M)$ et en déduire que la droite (MM') passe par un point fixe, lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B.

2° La droite (MM') recoupe (C) en N et (C') en N'.
Quelle est l'image de N par h_2 ?
Montrer que $(\overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN'},\ \overrightarrow{AM'}) \pmod{\pi}$ et en déduire que le triangle ANN' est rectangle en A.

3° Soit ω le milieu de $[MM']$. Montrer que ω appartient à un cercle fixe dont on donnera le centre et le rayon (on pourra utiliser le milieu D de $[OO']$.

☆Problème 159 *10 points.* ./1997/asieS/pb/texte

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A
Étude pour $n = 1$

1° Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour C_1 ?

2° Étudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.

3° Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$, à la courbe C_1.
Étude pour n = 2

Retour page 1

4° Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$.
Que peut-on en déduire pour C_2 ?

5° Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau des variations de f_2.

Partie B

1° Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de C_1 et C_2.

2° Tracer C_1 et C_2.

Partie C

n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1° . On pose $F(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.

2° En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n.$$

3° Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

Partie D

1° En utilisant la question 2 de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

2° En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur [[1 ; e], montrer que, pour tout n entier naturel non nul :

$$0 \leqslant I_n \leqslant 1.$$

3. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

III. Centres étrangers groupe 1, série S

✻ Ex. 578. ./1997/centresetrangersg1S/exo-spe/texte.tex

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 5 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives i, $\sqrt{2}$, et $\sqrt{2}+\mathrm{i}$.

On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments $[OB]$, $[AC]$ et $[BC]$ et s la similitude directe qui transforme A en I et O en B.

1° a) Déterminer le centre et l'angle de s.

b) Donner l'écriture complexe de s.

c) En déduire l'affixe ω du centre Ω de s. Représenter Ω dans la plan P.

d) Quelle est l'image du rectangle $OABC$ par s.

2° On considère la transformation $s^2 = s\circ s$.

a) Quelles sont les images des points O, A et B par s^2 ?

b) Montrer que s^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c) En déduire que les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.

3° On définit la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = s(A_n)$.

a) Placer les points A_1, A_2 et A_3 sur la figure du 1c.

b) On note u_n la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
- Calculer u_0 et en déduire u_n en fonction de n.
- Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ en fonction de n.
- Quelle est la limite de S_n en fonction de n ?

IV. Groupe I bis, série S

Ex. 579. ——— *4 points.* *./1997/groupeIbis/exo-1/texte.tex*

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.
On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance. On note A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux ». On note B l'événement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

1° a) Définir l'événement contraire de A que l'on notera

b) Calculer les probabilités de A et de $\overline{\text{A}}$.

2° a) Calculer $p(\text{B}/\text{A})$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p(\text{B} \cap \text{A})$.

b) Calculer $p(\text{B})$.

3° Calculer $p(\text{A}/\text{B})$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

Ex. 580. ——— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1997/groupeIbis/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 4 cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, −1 et i.
On considère l'application f de $\mathscr{P} - \{A\}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M de $\mathscr{P} - \{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2\mathrm{i}}.$$

1° a) Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b) Déterminer l'affixe du point C' image de C. Quelle est la nature de quadrilatère $ACBC'$?

c) Montrer que le point C admet un unique antécédent par f que l'on notera C'.
Quelle est la nature du triangle BCC' ?

2° Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'.

3° Déterminer, en utilisant la question précédente, quels sont les ensembles suivants :

a) L'ensemble E_b des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif.

b) L'ensemble E_b des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

c) ll4ensemble E_c des points Mdont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Ex. 581. ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1997/groupeIbis/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 3 cm. Tout point M du plan est repéré par son affixe z.

1° Déterminer et représenter l'ensemble E des points M du plan tels que $|z| = 3$.

2° On considère la transformation T qui à tout point M du plan distinct de O associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction du module et de l'argument de z.

b) Déterminer et représenter l'ensemble E', dont les éléments sont les points M' images des points M de E. Préciser ses éléments caractéristiques.

Retour page 1

3° Soit N le point d'affixe $-\frac{1}{z}$.. Montrer que M' est le milieu de $[MN]$.

4° Soit A le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
Montrer que, lorsque le point M décrit la demi-droite $[OA)$ privée du point O, le point N décrit une demi-droite D. Tracer D.

5° Montrer que l'image de la demi-droite $[OA)$ privée du point O par la transformation T est une partie d'une hyperbole H.
Représenter H après avoir donné ses éléments caractéristiques.

✰Problème 160 *11 points.*

./1997/groupeIbis/pb/texte

Partie A

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

1° Étudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

2° Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27.$$

3° En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1° Montrer que : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\varphi(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.

2° Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3° Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.

4° Chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C)par rapport à D.

5° Faire le tableau de variation de f.

6° Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2\,;4]$.

Partie C

On considère la fonction g, définie sur $[0\,;1]$ par : $g(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

On note (L) la courbe représentative de g dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, I le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1° Étudier brièvement les variations de g.

2° Donner une équation de la tangente en A à (L).

3° On note P l'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$. Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$.

4° On admet que la courbe (L)est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$. Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}.$$

5° Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+\mathrm{e}) - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Retour page 1

6° En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

V. Groupe II bis, série S

Ex. 582. ———— *4 points.* *./1997/groupeIIbis/exo-1/texte.tex*

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1° On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.

a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

2° On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 1.

3° n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.

a) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_n .

b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$. $(n > 1)$. Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite S de S_n.

Ex. 583. ———— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1997/groupeIIbis/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i.
Á tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{\mathrm{i} - z}.$$

1° Déterminer les points M confondus avec leur image M'.

2° Étant donné un complexe distinct de i, on pose : $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x', y' réels.
Montrer que :

$$x' = -\frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}.$$

En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble E.

3° Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'.
En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble F.

4° Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.
M' est le point d'affixe z' correspondant, et G l'isobarycentre des points A, M et M'.
Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
Montrer que Gest situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon. Après avoir comparé les angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de G. En déduire celle de M'.

Ex. 584. ———— *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1997/groupeIIbis/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe P est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.On fera une figure, à compléter au fur et à mesure des questions. On prendra 1 cm pour unité de longueur.
On considère le point J de coordonnées $(2\sqrt{3}\ ;\ 6)$ et le cercle (C) de diamètre $[OJ]$. On note I son centre.
Les points A, de coordonnées $(2\sqrt{3}\ ;\ 0)$, et B, de coordonnées$(0\ ;\ 6)$, sont les projetés orthogonaux de J, respectivement sur les axes $(O\ ;\ \vec{u})$ et $(O\ ;\ \vec{v})$. On remarquera que le cercle (C) est circonscrit au rectangle $OAJB$.

1° Soit S la similitude directe de centre O transformant B en A.

a) Déterminer l'angle et le rapport de cette similitude.

b) Déterminer les images I', J', A' des points I, J et A par la similitude S.

c) Soit M un point quelconque du cercle (C), et M' son image par la similitude S. Quel est l'ensemble (C') décrit par M'lorsque M décrit (C) ?

Représenter (C') puis démontrer que, quel que soit le point M du cercle (C), les points M, A et M' sont alignés.

2° Soit Ω le point de coordonnées $(4+2\sqrt{3}\ ;\ 2)$.

On considère la rotation R de centre Ω et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que J est l'image de J' par R.

b) Pour tout point M du plan P, on note M' son image par S et M'' l'image de M' par R. Déterminer l'image de J par la transformation $R\circ S$ (composée de R et de S), puis une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{JM},\ \overrightarrow{JM''})$, où M est distinct de J.

c. Montrer que $JM'' = JM$. En déduire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{JM''}$, et conclure quant à la nature de la transformation $R\circ S$.

✩Problème 161 *11 points.*

./1997/groupeIIbis/pb/texte

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

Partie A *Étude d'une fonction g*

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1$$

et C sa représentation graphique dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1° Étudiez les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2° Étudiez les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

3° On note C' la représentation graphique de la fonction $x\longmapsto \ln x$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Montrez que C et C' ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[0\,;1]$ on a :

$$x\ln x - x + 1 \leqslant \ln x.$$

On ne demande pas de représenter C et C'.

4° a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J = \int_1^{\mathrm{e}} (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$$

.

b) Soit D le domaine plan défini par :

$$D = \{M(x\ ;\ y)\ ;\ 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e} \quad \text{et} \quad g(x)\leqslant y\leqslant \ln x\}.$$

Déterminer, en cm^2, l'aire de D. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie B *Étude d'une fonction f*

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x.$$

.

1° Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en 1 (pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement).

2° Déterminer le tableau de variation de f (on pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$).

3° Tracer la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C *Étude de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$*

1° Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.

2° Soit h la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.

b) Étudier le sens de variation de h.

c) On pose $I = [3\,;4]$. Montrer que pour tout x élément de I on a $h(x)$ appartient à I et $\left|h'(x)\right| \leqslant \dfrac{5}{6}$.

3° On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a) Pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{5}{6}|u_n - \alpha|$.

b) Pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

c) La suite (u_n) converge vers α.

4° Donner un entier naturel p, tel que des majoration précédentes on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

VI. Réunion, série S

✩Problème 162

./1997/reunionS/pb/texte

Pour tout entier naturel n non nul, soit f_n la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit a un élément non fixé dans I. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1° Calculer $I_0(a)$.

2° Montrer que, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) + f_n(x).$$

3° En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}\mathrm{e}^{-a}.$$

4° Montrer alors que, pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.

5° Dans cette question, on pose $a = 1$.
On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n et tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}x^n$.

c) En déduire l'encadrement valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}.$$

Quelle est alors la limite de la suite (u_n) ?

d) Montrer enfin que

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \right)$$

Retour page 1

Chapitre 38

1998.

Sommaire

I. France sujet national, série S

Ex. 585. *5 points.* ./1998/franceS/exo-1/texte.tex

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, $P(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de A ; $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1° Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité avec : $p_i = P(X = i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2° Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :

C_1 : « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
C_2 : « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».

a) Calculer $P(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{E})$.

b) Montrer que $P(\mathrm{E}/\mathrm{C}_2) = 0{,}42$ et calculer $P(\mathrm{C}_2 \cap \mathrm{E})$.

c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3° Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

Ex. 586. *Enseignement Obligatoire 5 points.* ./1998/franceS/exo-2/texte.tex

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\frac{z-2}{z-1} = z. \tag{1}$$

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\frac{z-2}{z-1} = i. \tag{2}$$

On donnera la solution sous forme algébrique.

3° Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2.

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.

b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation de la question(2).

4° Montrer, à l'aide d'un interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i,$$

où n désigne un entier naturel non nul, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

5° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i.$$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

✻ Ex. 587. ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1998/franceS/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un angle droit direct ; I désigne le milieu de $[AB]$.

A. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1° Vérifier que les points C et I appartiennent à $\mathscr{E}$.

2° a) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$.

b) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ avec

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$, a et b étant des nombres complexes avec $a \neq 0$.

1° Déterminer les nombres a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.

2° Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}.$$

Déterminer le rapport et l'angle de T.

3° Montrer que la similitude T transforme B en I.

4° En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

5° Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

✩Problème 163 *10 points.* *./1998/franceS/pb/texte*

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm). On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$.

Partie A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \frac{2x}{x+2}$; on notera C la représentation graphique de f et Γ celle de g.
On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0 ; +\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1° Étudier le sens de variation de h sur $[0 ; +\infty[$ calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)

2° En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

$$\frac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x) \tag{1}$$

3° Construire dans le même repère les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en O une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

Partie B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \longmapsto kx$, majorant la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
Soit f_k la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1° Étudier le sens de variation de f_1 définie sur$[0\,;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln(1+x) - x.$$

2° Étudier la limite de f_1 en $+\infty$ et donner la valeur de f_1 en 0.

3° Montrer que pour tout réel x positif ou nul :

$$\ln(1+x) \leqslant x. \qquad (2)$$

4° En déduire que si $k \geqslant 1$, alors : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$.

5° Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$. Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k. (L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)

6° En déduire les valeurs de k strictement positives telles que : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$.

Partie C

1° Á l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

(On remarquera éventuellement que : $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.)

En déduire le calcul de $J = \displaystyle\int_0^1 (x - \ln(1+x))\,\mathrm{d}x$

puis de $K = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}\right)\mathrm{d}x$.

(Pour le calcul de K on pourra vérifier que : $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{x+2}$.)
Interprétez géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes C, Γ et la droite D obtenues dans la partie 163.

2° Soit u la fonction définie sur $[0\,;1]$ de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \quad \text{et si} \quad x \neq 0, \quad u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

a) Démontrer que la fonction u est dérivable sur $]0\,;1]$.

b) On admet que u est dérivable sur $[0\,;1]$ et on pose :

$$L = \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties 163 et 163, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2} \leqslant L \leqslant 1.$$

En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

Retour page 1

II. Polynésie, série S

✻ Ex. 588. ./1998/polynesieS/exo-1/texte.tex

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3+2\text{i}$.

On appelle f l'application du plan complexe qui, à tout point M distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z-1+2\text{i}}{z-1}.$$

1° Calculer les affixes des points O' et B' images respectives des points O et B par f.
Placer les points A, O, B et B' dans le plan.

2° a) Calculer pour tout $z \neq 1$, le produit $(z'-1)(z-1)$.

b) En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM \times AM' = 2 \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM'}}\right) = \frac{\pi}{2}+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

c) Démontrer que, si M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$. En préciser le centre et le rayon.
Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

d) Le cercle $(\mathscr{C}')$ est-il l'image par f du cercle $(\mathscr{C})$?

3° a) Déterminer l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AB}}\right)$.

b) Démontrer que si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite (d') que l'on précisera.

4° On appelle P le point d'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ et de la demi droite (d). Placer son image P' par f sur votre figure.

Chapitre 39

1999.

Sommaire

Á partir d'ici, les sujets se trouvent sur le site de l'APMEP : http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique346
Je mets juste celui ci pour l'instant !

I. National, série S

Ex. 589. ——— *5 points.* *./1999/national/exo-1/texte.tex*

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$.
L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1
Soit t un réel de $[-\pi\,;\,\pi]$ et m le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

1° Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases},\ t \in [-\pi\,;\,\pi].$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).

2° Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.

3° Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0\,;\,\pi]$.

4° Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0\,;\,\pi]$.

5° Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0\,;\,\pi]$.

6° Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\,;\,\pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Ex. 590. ——— *Obligatoire 5 points.* *./1999/national/exo-2/texte.tex*

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t$$

1° a) Soit φ la fonction définie sur $[0,2]$ par

$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$$

Étudier les variations de φ sur $[0,2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0,2]$,

$$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}$$

b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0,2]$, on a :

$$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)\,e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$$

c) Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$$

d) On rappelle que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite L, alors

$$3 \leqslant L \leqslant \frac{7}{2}$$

2° a) Vérifier que pour tout t dans $[0,2]$, on a

$$\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$$

En déduire l'intégrale

$$I=\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que, pour tout t dans $[0,2]$, on a

$$1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$$

En déduire que

$$I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}} I$$

c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite L.

Ex. 591. *Spécialité 5 points.* *./1999/national/exo-3/texte.tex*

Pour tout entier n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4\times 10^n,\quad b_n = 2\times 10^n - 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2\times 10^n + 1.$$

1° a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3.

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e) Montrer que $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2)$.
En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2° On considère l'équation :

$$b_3\,x + c_3\,y = 1 \qquad (1)$$

d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a) Justifier le fait que (**??**) possède au moins une solution.

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c) Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

☆Problème 164 *10 points.* *./1999/national/pb/texte*

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A *Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$.*

On considère la fonction f, définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2° Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3° Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln x + x - 3$$

a) Étudier les variations de u.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2,3]$. Montrer que $2,20 < \alpha < 2,21$.

c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $]0,+\infty[$.

4° a) Étudier les variations de f.

b) Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α. Montrer que

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.

5° a) Étudier le signe de $f(x)$.

b) Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B *Étude d'une primitive de f sur* $]0\,;+\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° a) Justifier l'existence de F.

b) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0,+\infty[$.

c) Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

2° *Calcul de $F(x)$.*

a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale

$$\int_1^x \ln t\, dt$$

(on pourra faire une intégration par parties).

b) Montrer que, pour tout x strictement positif :

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$$

c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3° a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.

b) Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3$$

En déduire la limite de F en $+\infty$

Retour page 1

c) Dresser le tableau de variation de F.

d) Tracer Γ sur le même graphique que $\mathscr{C}$.

4° *Calcul d'une aire.*
Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

CHAPITRE 40

DATES ET LIEUX INCONNUS

Sommaire

I. Sujet complet

Ex. 592. *4 points* ./xxx/exo-1/texte.tex

1° On donne deux entiers relatifs a et b et on considère l'équation $ax - by = 1$, où l'inconnue est le couple (x, y) d'entiers relatifs.
Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b, pour que l'ensemble des solutions de cette équation soit non vide.

2° Vérifier que le couple $(7, 24)$ est solution de l'équation

$$55x - 16y = 1 \qquad \text{(E)}$$

En déduire l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui sont solutions de (E).

Ex. 593. *4 points* ./xxx/exo-2/texte.tex

1° Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\frac{1+x}{x}.$$

Donner l'ensemble de définition, étudier les variations de la fonction f (on pourra utiliser le limite de $x\ln x$ quand x tend vers 0), tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dans un plan affine P (On prendra 2 cm pour unité de longueur).
Pour le graphique, on utilisera les valeurs approchées suivantes : $\ln 2 \approx 0{,}69$ $\ln 3 \approx 1{,}10$ $\ln 5 \approx 1{,}61$.

2° On donne un réel $a > 1$.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(E)$ de l'ensemble E des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant a \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

Calculer la limite de $\mathscr{A}(E)$ quand $a \to +\infty$.
(On pourra poser $a = \dfrac{1}{X}$).

☆PROBLÈME 165 *12 points* ./xxx/pb/texte

Partie I.
Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathscr{P}$. On considère l'application $f_{a,b}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

dans laquelle a et b sont deux nombres réels.

1° Comment fait-il choisir a et b afin que l'application $f_{a,b}$ soit bijective ?
Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le noyau de $f_{a,b}$ et l'image de $\mathscr{P}$ par $f_{a,b}$.

2° On désigne par $\mathscr{F}^\star$ l'ensemble des applications $f_{a,b}$ bijectives.
On munit $\mathscr{F}^\star$ de la loi de composition des applications notée $\circ$.
Démontrer que $\left(\mathscr{F}^\star, \circ\right)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

3° Démontrer que, pour deux valeurs du réel λ, distinctes ou confondues, il existe des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{P}$, distincts du vecteur nul, vérifiant $f_{a,b}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
Dans le cas où ces deux valeurs λ sont confondues, reconnaître $f_{a,b}$. Dans le cas où ces deux valeurs λ sont distinctes, déterminer pour chacune d'elles l'ensemble de vecteur $\vec{u}$ tels que $f_{a,b}(\vec{u} = \lambda\vec{u}$.

4° Soit les vecteurs $\vec{e_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$ $\vec{e_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$.
Démontrer que $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e_2})$ est une base orthonormée de $\mathscr{P}$.
Quelle est la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathscr{B}'$?

Partie II.

Soit P le plan affine associé à $\mathscr{P}$. On munit P du repère orthonormé $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Dans la suite du problème, les coordonnées seront toujours prises dans ce repère.
On considère l'application affine $g_{a,b}$ de P à laquelle est associée l'application $f_{a,b}$ et qui transforme le point O en le point O' de coordonnées $x_{O'} = 2$, $y_{O'} = 0$.

1° Exprimer les coordonnées $(x' ; y')$ du point $N' = g_{a,b}(N)$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ du point N.

2° Pour quelles valeurs de a et b, $g_{a,b}$ est-elle une isométrie affine ? Préciser, dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de cette isométrie.

3° Pour quelles valeurs de a et b, $g_{a,b}$ est-elle une homothétie ? Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.

4° Vérifier que, quels que soient a et b,
$$f_{a,b} = f_{a,\frac{1}{2}} \circ f_{\frac{1}{2},b}.$$
En déduire que $g_{a,b}$ est le produit de trois applications affines que l'on précisera.
Construire à l'aide de cette remarque, le transformé N' (par $g_{a,b}$) du point N, lorsque $a = 2$ et $b = \dfrac{3}{2}$.

II. A Classer !

II.a) Besançon, série C

Ex. 594. ./xxx/besançonC/exo-1/texte.tex

Soit f la fonction numérique$f$ de la variable réelle x définie par
$$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

1° Étudier f et faire la représentation graphique (C) de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unité : 1 cm).

2° Montrer qu'une primitive de f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ où $0 < \alpha < \beta < \pi$ est la fonction F définie par
$$F(x) = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - g(x)$$
où g désigne une fonction simple que l'on déterminera.

3° En déduire l'aire, en centimètres carrés, du domaine (Δ) défini par
$$\left\{M(x ; y) \left| \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\right.\right\}.$$

Retour page 1

Ex. 595. ./xxx/besançonC/exo-2/texte.tex

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1° Déterminer l'ensemble des primitives de f.

2° Soit A, B, C trois éléments d'un ensemble Ω, F une primitive de f, α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$.
On définit une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par

$$P(\{A\}) = \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x, \quad P(\{B\}) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x, \quad P(\{C\}) = 1 - F(\beta).$$

$$\begin{aligned}
P(\{A,\ B\}) &= P(\{A\}) + P(\{B\}) \\
P(\{B,\ C\}) &= P(\{B\}) + P(\{C\}) \\
P(\{A,\ C\}) &= P(\{A\}) + P(\{C\}) \\
P(\{\Omega\}) &= P(\{A\}) + P(\{B\}) + P(\{C\}) \\
P(\{\emptyset\}) &= 0 \quad (\emptyset = \text{ ensemble vide}).
\end{aligned}$$

Déterminer F pour que P définisse une probabilité sur Ω.

Ex. 596. ./xxx/exo-3/texte.tex

« Résolution quantitative » de l'équation $x^k = e^x$. Dans tout le problème , k désigne un entier naturel non nul . $\mathscr{F}$ est la famille de fonctions f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k e^{-x}$.
$\mathscr{C}_k$ est la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm .
Tous les calculs devront être justifiés.

Partie A.

1° Étudier les variations et les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions f_1 , f_2 et f_3.
Établir les tableaux de variation de ces trois fonctions en précisant les nombres dérivés en 0.

2° Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par deux points fixes dont vous précisez les coordonnées.

3° Étudier les variations de f_k ainsi que les limites en $+\infty$ et $-\infty$ lorsque :
- k est impair.
- k est pair.

4° Comparer les positions respectives de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ sur les intervalles $[0;+\infty[$ puis de $\mathscr{C}_k$ et de $\mathscr{C}_{k+2}$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

5° En déduire les positions respectives de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et C_3 et les représenter dans le même repère.

Partie B.

1° On pose, pour $x > 0$, $u(x) = x\ln(x) - x$.
Étudier les variations de u et ses limites en 0 et $+\infty$.

2° On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \exp[u(x)] \text{ si } \quad x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

On appelle $\mathscr{E}$ sa courbe représentative.

a) Montrer que g est continue en zéro et que g n'est pas dérivable en zéro. (on rappelle que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1)$$

b) Étudier les variations de g ainsi que sa limite en $+\infty$.

c) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $g(x) \geqslant 1$.

d) On considère les points $M_k(k; f_k(k))$ avec $k \in \mathbb{N}^\star$. Vérifier que M_k est un point de $\mathscr{E}$. Tracer $\mathscr{E}$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

e) Déterminer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f_k(x) = 1$.

Ex. 597. ./xxx/exo-4/texte.tex

Pour tout nombre complexe z, on définit :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

1° Vérifier que $P(2) = 0$. En déduire une factorisation de $P(z)$.

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive. Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

3° a) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), les points A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2 et I le milieu de $[AB]$.

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.

c) Calculer l'affixe z_I de I puis le module de z_I.

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos(\frac{3\pi}{8})$ et $\sin(\frac{3\pi}{8})$.

Ex. 598. ./xxx/exo-5/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B.

1° On considère la transformation $T = R_B \circ (R_A)^{-1}$.

a) Construire le point C image de A par T.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

c) En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA.

2° On suppose que M décrit le cercle Γ de diamètre $[AB]$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 décrit par le point M_2 quand M décrit Γ.

b) Soient w et w_2 les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{ww_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer l'ensemble décrit par le point I, milieu de $[M_1M_2]$ quand M décrit Γ.

Ex. 599. *1983, lieu ?* ./xxx/exo-6/texte.tex

On considère des entiers a, b, $c$tels que :

$$\text{PGCD}(a,b) = 3 \qquad \text{et} \qquad \text{PGCD}(b,c) = 4. \tag{I}$$

1° Montrer que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble.

2° On suppose dans cette question que a et c sont premiers entre eux. Montrer que l'on a la relation suivante :

$$abc = \text{PPCM}(a,b,c)\text{PGCD}(a,b)\text{PGCD}b,c)\text{PGCD}c,a)$$

. 3) On suppose dans cette question que $abc = 12\,096$, a, b, c vérifiant le système (I). Trouver tous les triplets (a, b, c).

✻ Ex. 600. ./xxx/exo-7/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\quad \text{et}\quad AB<AC.$$

. On note $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB=CP$.

La droite (OE) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en I et J, tels que J et A soient sur le même arc $\widehat{BC}$ du cercle $(\mathscr{C})$.

1° a) Faire une figure.

b) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\ ?$$

c) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\ \text{et}\ MB<MC?$$

2° a) Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A)=P$ et $R(B)=C$, et déterminer son angle.

b) Démontrer que son centre est un point du cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

c) . Quelle est la nature du triangle JAP ?

3° Déterminer l'image de B par la composée $R\circ S_B$, où S_B désigne la symétrie de centre B. Donner, en la justifiant, la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

✻ Ex. 601. ./xxx/exo-8/texte.tex

Soit ABC un triangle de sens direct ayant trois angles aigus.

1° Construire les cercles $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ tels que :

– $\mathscr{C}_a-\{C,\ B\}$ est l'ensemble des points P tels que $(\overrightarrow{PC},\ \overrightarrow{PB})=\dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$.

– $\mathscr{C}_b-\{A,\ C\}$ est l'ensemble des points Q tels que $(\overrightarrow{QA},\ \overrightarrow{QC})=\dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$.

– $\mathscr{C}_c-\{B,\ A\}$ est l'ensemble des points R tels que $(\overrightarrow{RB},\ \overrightarrow{RA})=\dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$.

Démontrer que les cercles $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ ont un point commun noté I.

2° Soit P un point extérieur à ABC sur $\mathscr{C}_a$. La droite (PC) recoupe $\mathscr{C}_b$ en un point Q. Soit R le point d'intersection des droites (QA) et (PB).

Montrer que R est sur $\mathscr{C}_c$. Quelle est la nature du triangle PQR ?

3° Á tout triangle PQR on associe $\ell(PQR)=IP+IQ+IR$.

a) Déterminer P pour que IP soit maximum. Soit P_0 ce point.
Construire le triangle $P_0Q_0R_0$ déterminé à partir de P_0.

b) Montrer que $\ell(PQR)$ est maximum pour $P_0Q_0R_0$.

✻ Ex. 602. ./xxx/exo-10/texte.tex

Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $xy=1$, A est un point de $\mathscr{H}$ et A' le symétrique de A par rapport à O. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre A passant par A'.

Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ recoupe l'hyperbole $\mathscr{H}$ en trois points qui sont les sommets d'une triangle équilatéral.

On note ω l'affixe de A et $M(z)$. On pose $Z=z-\omega$.

1° Montrer que $M\in\mathscr{C}$, équivaut à $(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})=4\omega\overline{\omega}$.

2° Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $M\in\mathscr{H}$;

(ii) $z^2-\omega^2=\overline{z}^2-\overline{\omega}^2$;

(iii) $z^2-\overline{z}^2=4\mathrm{i}$.

3° En déduire que $M \in \mathscr{C} \bigcap \mathscr{H}$ équivaut à

$$\begin{cases} Z \times \overline{Z} & = 4\omega\overline{w} \\ Z^2 + 2\omega z & = \overline{Z}^2 + 2\overline{\omega}z. \end{cases}$$

4° Conclure.

5° Examiner le cas où A' est sur $\mathbb{C}$.

Ex. 603. ./xxx/exo-13/texte.tex

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Soit P le plan rapporté à un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On note J l'ensemble $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ des n premiers entiers naturels non nuls.
   On appelle $M_{(n,\ p)}$ le point de coordonnées $(n\ ;\ p)$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, $(m,\ p)$ appartenant à $J \times J$.
   On affecte chaque point $M_{(m,\ p)}$ du coefficient m ; on note $(M_{(m,\ p)},\ m)$ le point pondéré obtenu.

   a) Déterminer, dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les coordonnées du barycentre G_1 du système $\{(M_{(1,\ p)},\ 1)\ ;\ p \in J\}$ obtenu pour $m = 1$.
   Déterminer dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les coordonnées du barycentre G_{m_0} du système $\{(M_{(m_0,\ p)},\ 1)\ ;\ p \in J\}$ obtenu pour $m = m_0$.

   b) En déduire les coordonnées du barycentre G du système

$$\{(M_{(m,\ p)},\ m)\ ;\ (m,\ p) \in J \times J\}.$$

Index