

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $A(-2, 2, 8)$ و $B(6, 6, 0)$ و $C(2, -1, 0)$ و $D(0, 1, -1)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

$$1. \text{ لدينا : } \vec{OC} \wedge \vec{OD} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

المتجهة $\vec{OC} \wedge \vec{OD}$ هو $(1, 2, 2)$.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء. لدينا : $\vec{OC} \wedge \vec{OD}$ متجهة منظمية على المستوى (OCD) . إذن :

$$M \in (OCD) \Leftrightarrow \vec{OM} \cdot (\vec{OC} \wedge \vec{OD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2z = 0$$

وبالتالي فإن $x + 2y + 2z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) .

2. لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء. لدينا :

$$M \in (S) \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2-x)(6-x) + (2-y)(6-y) + (8-z)(-z) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 8z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 36$$

وبالتالي فإن (S) فلكة مركزها $\Omega(2, 4, 4)$ وشعاعها $R = \sqrt{36} = 6$.

$$3. \text{ أ- مسافة النقطة } \Omega(2, 4, 4) \text{ عن المستوى } (OCD) \text{ هي : } d(\Omega, (OCD)) = \frac{|2 + (2 \times 4) + (2 \times 4)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{18}{3} = 6 = R$$

ب- بما أن $d(\Omega, (OCD)) = R$ ، فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .

$$\text{ج- لدينا : } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{vmatrix} = (-2 \times 6) + (2 \times 6) + (8 \times 0) = -12 + 12 = 0$$

بما أن $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -12 + 12 = 0$ ، فإن $O \in (S)$. ولدينا : $O \in (OCD)$.

وبما أن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) ، فإن O هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (OCD) .

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \overline{u}, \overline{v})$ النقط A و B و C التي ألقاها

على التوالي هي : $a = 2 - 2i$ و $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$

$$1. \text{ لدينا : } a = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right] = \boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\text{و لدينا : } b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left[1, \pi - \frac{\pi}{6} \right] = \left[1, \frac{5\pi}{6} \right] = \boxed{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

2. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R . لدينا :

$$z' = R(z) \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{5\pi}{6}} z \Leftrightarrow \boxed{z' = bz}$$

ب- لتكن C' ، صورة النقطة A بالدوران R ، لحقها c' . لدينا :

$$c' = ba = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (2 - 2i) = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + 1 = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i = c$$

إذن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .

3. حسب السؤال (2-ب-) ، لدينا : $c = ba$. إذن :

$$\begin{aligned} \arg(c) &\equiv \arg(ab) \quad [2\pi] \\ &\equiv \arg(a) + \arg(b) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

وحسب السؤال 1. ، نستنتج أن :

$$\begin{aligned} \arg(c) &\equiv \arg(a) + \arg(b) \quad [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا وثلاث كرات من الصندوق . وهذا يدل على السحب الأني (التاليفات) في حالة فرضية تساوي الاحتمال.



1. نعتبر الحدثين التاليين : A « الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون »



و B « الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثلى مثلى »



$$p(A) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{10+4+1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} \quad \text{احتمال الحدث } A \text{ هو :}$$

$$p(B) = \frac{C_5^1 C_4^1 C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \quad \text{احتمال الحدث } B \text{ هو :}$$

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها.

أ- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 1 و 2 و 3. ولدنيا : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$\text{ب- لدنيا : } p(X=1) = p(A) = \frac{3}{44} \quad \text{و} \quad p(X=3) = p(B) = \frac{3}{11}$$

$$\text{و : } p(X=2) = 1 - (p(X=1) + p(X=3)) = 1 - \left(\frac{3}{44} + \frac{3}{11}\right) = 1 - \frac{15}{44} = \frac{29}{44}$$

$$\text{أو : } p(X=2) = \frac{C_3^2 C_9^1 + C_4^2 C_8^1 + C_5^2 C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{(3 \times 9) + (6 \times 8) + (10 \times 7)}{220} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

$$\left(BB\bar{B} \text{ أو } NN\bar{N} \text{ أو } RR\bar{R} \right)$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

x_k	1	2	3
$p_k = p(X = x_k)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

الأمّل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{k=1}^3 x_k p_k = \left(1 \times \frac{3}{44}\right) + \left(2 \times \frac{29}{44}\right) + \left(3 \times \frac{3}{11}\right) = \frac{97}{44} \approx 2,2$$

_____ :

$$\text{نضع : } I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx \quad \text{و} \quad J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6) dx$$

$$1. \text{ أ- ليكن } x \in \mathbb{R} - \{-3\} \text{ . لدنيا : } \frac{x}{x+3} = \frac{x+3-3}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$$

ب- حساب التكامل I :

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3} dx = \left[x - 3 \ln|x+3| \right]_{-2}^{-1} = (-1 - 3 \ln 2) - (-2 - 3 \ln 1) = \boxed{1 - 3 \ln 2}$$

2. حساب التكامل J :

$$J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6) dx = \int_{-2}^{-1} x' \ln(2x+6) dx$$

$$= \left[x \ln(2x+6) \right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} x (\ln(2x+6))' dx$$

$$= -\ln 4 + 2 \ln 2 - \int_{-2}^{-1} \frac{2}{2x+6} dx$$

$$= -\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+3} dx$$

$$J = -I = -1 + 3 \ln 2$$

تكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$ ، وليكن \mathcal{D}

المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1.1. ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$e^{2x} - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^{2x} - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 \quad \checkmark$$

\checkmark حيز تعريف الدالة f : بما أن : $e^{2x} - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$ ، فإن :

$$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0 \right\} = \mathbb{R}$$

\checkmark لكل x من \mathbb{R} ، لدينا : $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0 \Rightarrow \frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} > 0 \Rightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$. إذن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

2. لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln\left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1\right) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\ln\left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1\right) = 2\ln 2 = \boxed{\ln 4} \quad \checkmark$$

المنحنى \mathcal{C} يقبل مقاربا أفقيا بجوار $-\infty$ معادلته : $y = \ln 4$.

3. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x) = 2\ln\left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1\right)' = 2 \frac{\left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1\right)'}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} = 2 \frac{2(\sqrt{e^x} - 1)'(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} = 2 \frac{2 \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} (\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}}$$

$$f'(0) = \frac{2\sqrt{e^0}(\sqrt{e^0} - 1)}{(\sqrt{e^0} - 1)^2 + 1} = \boxed{0} \quad \text{ولدينا :}$$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $\sqrt{e^x} - 1 = \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x} + 1}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x} - 1$ على \mathbb{R} هي إشارة $e^x - 1$. ولدينا :

$x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow e^x - 1 \leq 0$ و $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0$. ومنه نستنتج أن :

$$\forall x \in]-\infty, 0] : \sqrt{e^x} - 1 \leq 0 \quad \text{و} \quad \forall x \in [0, +\infty[: \sqrt{e^x} - 1 \geq 0$$

بما أن $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، فإن إشارة $f'(x)$ على هي إشارة $\sqrt{e^x} - 1$.

وعليه فإن : $f'(x) \geq 0$: $\forall x \in [0, +\infty[$ و $f'(x) \leq 0$: $\forall x \in]-\infty, 0]$.
 إذن : f تزايدية على المجال $[0, +\infty[$ وتناقصية على المجال $] -\infty, 0]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	ln 4	0	$+\infty$

4. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$f(x) = 2 \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = 2 \ln \left(e^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) \right) = 2 \ln(e^x) + 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right)$$

$$f(x) = 2x + 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right)$$

ب- بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) = 0$ ، فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحنى \mathcal{C} بجوار $+\infty$.

5. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = e^x - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 = e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$.

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $\sqrt{e^x} - 2 = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x} + 2}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x} - 2$ على \mathbb{R} هي إشارة $e^x - 4$.
 ولدينا : $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$. ومنه فإن :

x	$-\infty$	ln 4	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 2$	-	0	+

ونعلم إشارة $\sqrt{e^x} - 1$ على \mathbb{R} حسب السؤال (3. ب-) . إذن :

x	$-\infty$	0	ln 4	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 2$	-	-	0	+
$\sqrt{e^x} - 1$	-	0	+	+
$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$	+	-	+	+

جـ- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $[0, \ln 4]$ ، لدينا :

$$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \leq 0 \Rightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 \leq 0 \Rightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$$

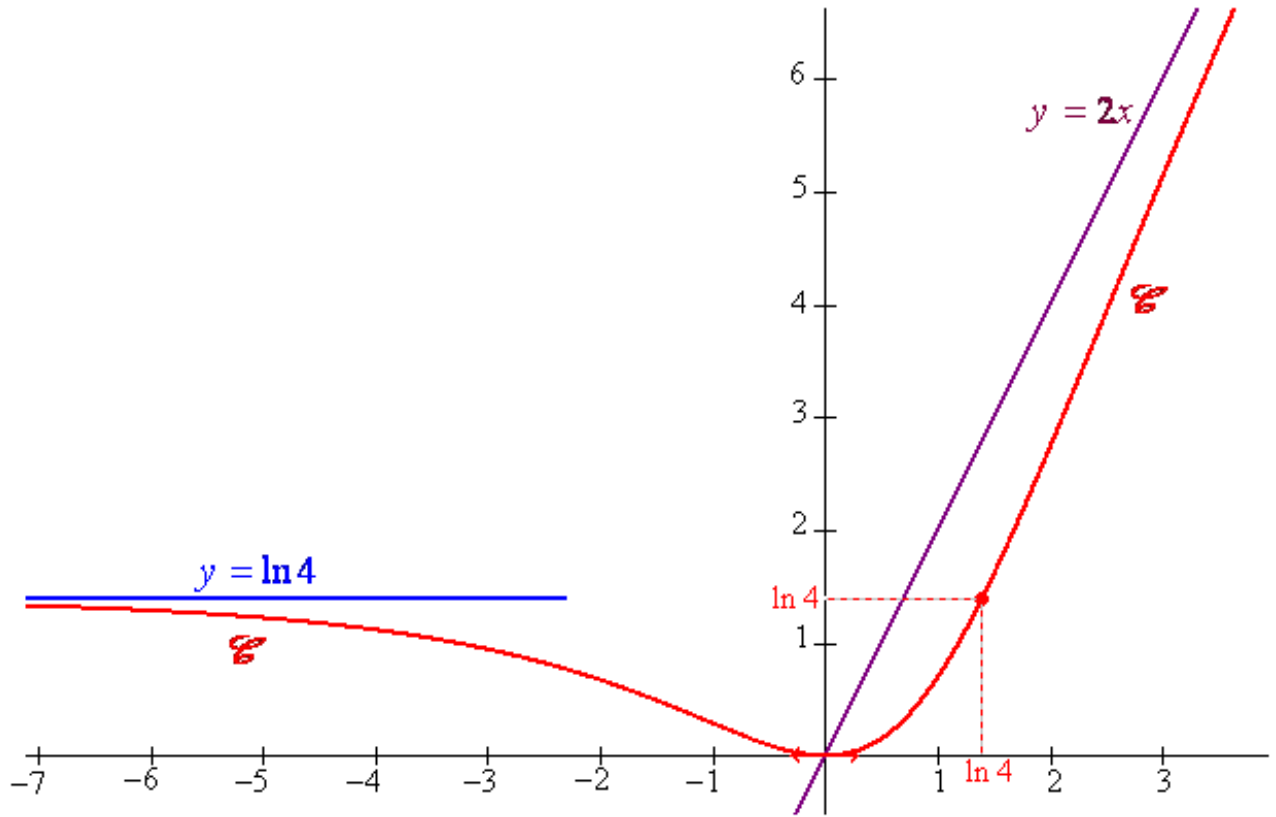
د- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $[0, \ln 4]$ ، لدينا :

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x} \Rightarrow \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \ln(\sqrt{e^x}) \Rightarrow \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq x \Rightarrow f(x) \leq x$$

إذن : $\forall x \in [0, \ln 4] : f(x) \leq x$

6. إنشاء المنحنى \mathcal{E} :



11. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. لدينا :

✓ من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 1$ ، إذن : $0 \leq u_0 \leq \ln 4$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعترض أن : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ ، ونبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$

نعلم أن f تزايدية على المجال $[0, \ln 4]$. إذن :

$$0 \leq u_n \leq \ln 4 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln 4) \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$$

✓ وبالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \ln 4$

2. نعلم أن : $\forall x \in [0, \ln 4] : f(x) \leq x$ ، وأن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \ln 4$.

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) \leq u_n$. أي : $u_{n+1} \leq u_n$.

وبالتالي فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3. لدينا : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0 . إذن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

وبما أن :

f متصلة على المجال $[0, \ln 4]$.

f متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[0, \ln 4]$.

إذن : $f([0, \ln 4]) = [f(0), f(\ln 4)] = [0, \ln 4]$.

$u_0 = 1 \in [0, \ln 4]$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l \in \mathbb{R}$.

فإن النهاية l تحقق الشرطان التاليان : $f(l) = l$ و $l \in [0, \ln 4]$.

ولدينا :

$$f(l) = l \Leftrightarrow 2 \ln(e^l - 2\sqrt{e^l} + 2) = l$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^l - 2\sqrt{e^l} + 2) = \frac{l}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^l - 2\sqrt{e^l} + 2 = \sqrt{e^l}$$

$$\Leftrightarrow e^l - 3\sqrt{e^l} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{e^l} - 1)(\sqrt{e^l} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^l} = 1 \text{ أو } \sqrt{e^l} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^l = 1 \text{ أو } e^l = 4$$

$$\Leftrightarrow l = 0 \text{ أو } l = \ln 4$$

وبما أن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ، فإن : $u_n \leq u_0 = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$. إذن : $l \leq 1$. ومنه فإن : $l = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

خلاصة :