

## تقديم : ذ. الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

### التمرين الأول :

1. نبين أن :  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB}(4,0,-3) \\ \overline{AC}(8,1,-6) \end{array} \right. \quad \text{لدينا :}$$

إذن :

$$\begin{aligned} \overline{AB} \wedge \overline{AC} &= \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 3\vec{i} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

$$\cdot \overline{AB} \wedge \overline{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k} \quad \text{ومنه :}$$

### استنتاج :

نعلم أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  منتظمة على المستوى  $(ABC)$ .

إذن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  تكتب على شكل  $3x + 4z + d = 0$  حيث  $d$  عدد حقيقي .

وحيث أن  $B$  نقطة من المستوى  $(ABC)$  فإن  $3 \times 3 + d = 0$  أي أن :  $d = -9$  .

ومنه  $3x + 4z - 9 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  .

2. نبين أن مركز الفلكة  $(S)$  هو  $\Omega(3,1,0)$  وشعاعها هو 5 .

$$\text{لدينا } x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

$$\text{يكافئ : } (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - 15 = 0$$

$$\text{يكافئ : } (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$$

ومنه : مركز الفلكة  $(S)$  هو  $\Omega(3,1,0)$  وشعاعها هو 5 .

### 3. أ. تمثيل بارامتري للمستقيم $(\Delta)$ :

المستقيم  $(\Delta)$  عمودي على المستوى  $(ABC)$  و المتجهة  $\vec{n}(3,0,4)$  منتظمة على المستوى  $(ABC)$  .

إذن  $\vec{n}(3,0,4)$  موجهة للمستقيم  $(\Delta)$

وعليه فإن المستقيم  $(\Delta)$  مار من  $\Omega(3,1,0)$  و موجهة بالمتجهة  $\vec{n}(3,0,4)$  .

$$\text{ومنه : النظمة } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in R) \quad \text{تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta)$$

3. ب. نبين أن المستقيم  $(\Delta)$  يقطع الفلكة في النقطتين  $E$  و  $F$  :

بما أن المستقيم  $(\Delta)$  يمر من مركز الفلكة فإنه يخرقها في نقطتين .

وحيث أن  $E$  و  $F$  تحققان معادلة الفلكة فهما تنتميان إليها .  
 وحيث أن  $E$  و  $F$  تنتميان إلى المستقيم  $(\Delta)$  (من اجل القيمتين 1 و  $(-1)$  للبارامتر  $t$ )  
 فالنقطتان مشتركتان بين المستقيم والفلكة  
 وعليه فإن المستقيم  $(\Delta)$  يقطع الفلكة في النقطتين  $E$  و  $F$   
 ملاحظة : يمكن حل النظمة المكونة من معادلة الفلكة وتمثيل بارامترى للمستقيم .

## التمرين 2 :

### 1. حل المعادلة المقترحة :

مميز المعادلة هو  $\Delta = -4$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و هما  $3+i$  و  $3-i$ .

### 2. أ. بين أن $z' = iz + 2 - 4i$ :

لدينا :  $R(M) = M'$  يكافئ  $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$

يكافئ  $z' = i(z - 3 + i) + 3 - i$

ومنه :  $z' = iz + 2 - 4i$

### 2. ب. نحدد لحق صورة $C$ بالدوران :

لدينا  $R(C) = C'$  إذن :  $c' = i(7 - 3i) + 2 - 4i$

وبالتالي :  $c' = 5 + 3i$  هو لحق صورة  $C$  بالدوران  $R$  .

### 2. ج. نبين أن $\frac{c' - b}{c - b} = \frac{1}{2}i$ :

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{c' - b}{c - b} &= \frac{5 + 3i - 3 - i}{7 - 3i - 3 - i} \\ &= \frac{2 + 2i}{4 - 4i} \\ &= \frac{1 + i}{2 - 2i} \\ &= \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

### استنتاج :

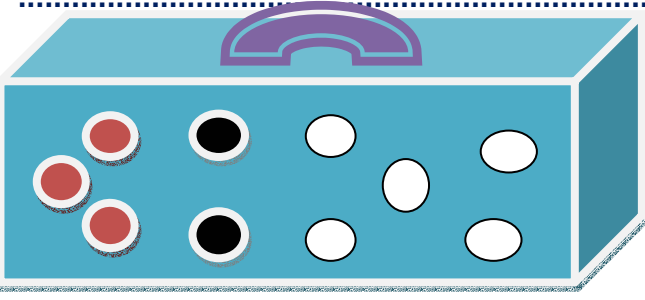
لدينا  $\frac{c' - b}{c - b} = \frac{1}{2}i$  و  $\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن :  $\left\| \frac{c' - b}{c - b} \right\| = \frac{1}{2}$  و  $\arg\left(\frac{c' - b}{c - b}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

وبالتالي :  $\frac{BC'}{BC} = \frac{1}{2}$  و  $\arg(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ومنه المثلث  $BCC$  قائم الزاوية في  $B$  وأن  $BC = 2BC'$ .

### التمرين الثالث :



1. نحسب احتمالي الحدثين  $A$  و  $B$  :

السحب يتم تأنيا. (لايوجد ترتيب )

إذن كل سحبة عبارة عن تاليفة لأربع عناصر من بين 10 .

ومنه  $card \Omega = C_{10}^4 = 210$ .

. وقوع الحدث  $A$  يعني سحب كرة حمراء واحدة فقط وثلاثة غير حمراء  
ومنه

$$p(A) = \frac{C_3^1 C_7^3}{210}$$

$$= \frac{1}{2}$$

. الحدث المضاد  $\bar{B}$  للحدث  $B$  هو عدم الحصول على أية كرة بيضاء.

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) \quad \text{و} \quad p(\bar{B}) = \frac{C_5^4}{210} = \frac{5}{210}$$

$$p(B) = 1 - \frac{5}{210} = \frac{41}{42}$$

2. أ. نتحقق من قيم  $X$  :

قيمة المتغير  $X$  هي عدد الكرات الحمراء المحصل عليها بعد سحب 4 كرات كمشة واحدة من الصندوق .

الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء .

عندما نسحب دفعة واحدة أربع كرات من هذا الصندوق ، يكون عدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها إما 0 ، 1 ، 2 أو 3 .

ومنه قيم  $X$  هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

$$2. ب. نبين أن :  $p(X = 0) = \frac{1}{6}$  و  $p(X = 2) = \frac{3}{10}$$$

الحدث  $(X = 2)$  هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين غير حمراوين :

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^2}{210} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$$

الحدث  $(X = 0)$  هو عدم الحصول على أية كرة حمراء

$$p(X = 0) = \frac{C_7^4}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

ج. نحدد قانون احتمال  $X$  :

$$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$$

سابق وحددنا احتمالات الأحداث  $(X = 0)$  ،  $(X = 1)$  وهو الحدث  $A$  ثم الحدث  $(X = 2)$ .

الحدث  $(X = 3)$  يتحقق عندما نسحب 3 كرات حمراء وواحدة غير حمراء .

$$p(X = 3) = \frac{C_3^3 C_7^1}{210} = \frac{7}{210}$$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

$X_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/6	1/2	3/10	1/30

### التمرين الرابع :

1. نبين بالترجع أن  $u_n - 1 > 0$  لكل  $n$  من  $N$ .

. العبارة صحيحة من أجل  $n = 0$  لأن  $u_0 = 2$

. ليكن  $n$  من  $N$ .

نفترض أن:  $u_n - 1 > 0$

نبين أن :  $u_{n+1} - 1 > 0$

لدينا :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3 \cdot u_n - 1}{2u_n} - 1$$

$$= \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

وبما أن  $u_n - 1 > 0$

فإن  $u_n > 1$  وبالتالي  $2u_n > 0$

وعليه فإن  $\frac{u_n - 1}{2u_n} > 0$  أي  $u_{n+1} - 1 > 0$

.ومنه حسب مبدأ التراجع :  $u_n - 1 > 0$  لكل  $n$  من  $N$ .

2.أ. نبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية :

ليكن  $n$  من  $N$ .

لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2 \cdot \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{1}{2} v_n$$

$$= \frac{1}{2} v_n$$

.ومنه :  $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$  لكل  $n$  من  $N$ .

وعليه فإن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

**استنتاج :** حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا :  $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{1}{3} \text{ : ولدينا}$$

$$\text{إذن : } v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } N.$$

$$\text{2.ب. نبين أن } u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \text{ :}$$

ليكن  $n$  من  $N$   
لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \Rightarrow v_n(2u_n - 1) = u_n - 1$$

$$\Rightarrow 2v_n u_n - v_n = u_n - 1$$

$$\Rightarrow 2v_n u_n - u_n = v_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n(2v_n - 1) = v_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

$$\text{ومنه : } u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \text{ لكل } n \text{ من } N.$$

**استنتاج :**

$$\text{لدينا } u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \text{ و } v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } N$$

$$\text{إذن } u_n = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$\text{وحيث أن } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ فإن } \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{ومنه : } \lim u_n = 1$$

**3. حساب  $\lim w_n$  :**

$$\text{لدينا } \lim u_n = 1 \text{ والدالة } \ln \text{ متصلة في } 1$$

$$\text{إذن : } \lim w_n = \ln 1$$

$$\text{ومنه : } \lim w_n = 0$$

wadiifi@hotmail.com

الجزء الأول :  $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1. نبين أن :  $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$  لكل  $x$  من  $R$  :

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $R$  ولكل  $x$  من  $R$  لدينا :

$$\begin{aligned}g'(x) &= 4e^{2x} + 2 \times 4xe^{2x} \\ &= 4(1+2x)e^{2x}\end{aligned}$$

ومنه :  $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$  لكل  $x$  من  $R$

2. نحدد تغيرات  $g$  :

لكل  $x$  من  $R$  :  $e^{2x} > 0$

إذن إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $1+2x$

ولدينا :  $1+2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

ومنه  $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

وعليه فإن :  $g$  تزايدية على  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  و تناقصية على  $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ .

3. نبين أن :  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$

لدينا

$$\begin{aligned}g\left(-\frac{1}{2}\right) &= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} e^{-1} \\ &= 1 - 2e^{-1} \\ &= 1 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

استنتاج : لدينا  $e < 2$  إذن  $\frac{2}{e} < 1$  وبالتالي  $0 < 1 - \frac{2}{e}$

ومنه :  $0 < g\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. نستنتج أن  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $R$ .

ليكن  $x$  من  $R$  ،

إذا كان  $x \geq -\frac{1}{2}$  فإن  $g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$  لأن  $g$  تزايدية على  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

وبالتالي :  $g(x) > 0$

إذا كان  $x \leq -\frac{1}{2}$  فإن  $g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$  لأن  $g$  تناقصية على  $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ .

وبالتالي :  $g(x) > 0$

ومنه :  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $R$ .

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$$

1. نحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

لدينا  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  .

نبين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  :

لدينا  $f(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1$

نضع  $u = 2x$  إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  .

2. بين أن  $f'(x) = g(x)$  لكل  $x$  من  $R$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $R$  ولكل  $x$  من  $R$  لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} + 1 \\ &= 1 + 4xe^{2x} \end{aligned}$$

ومنه  $f'(x) = g(x)$  لكل  $x$  من  $R$  .

استنتاج : لدينا  $f'(x) = g(x)$  لكل  $x$  من  $R$  و  $g$  موجبة قطعاً على  $R$  .

ومنه  $f$  تزايدية قطعاً على  $R$  .

3.أ. نحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-1}{x} e^{2x} + \frac{x+1}{x} \right)$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$  .

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  .

استنتاج : بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

فإن منحنى الدالة  $f$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتاب جوار  $(+\infty)$  .

3.أ. نحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1))$  :

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^{2x} - e^{2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

( انظر الجواب على السؤال 1 )

استنتاج :

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$

فإن : المستقيم  $(\Delta)$  المعروف بالمعادلة  $y = x + 1$  مقارب لمنحنى الدالة  $f$  جوار  $(+\infty)$  .

ج. نحدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع  $(\Delta)$  ومنحنى الدالة  $f$  .

لتكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى ،

لدينا :

$$\begin{aligned} M \in (\Delta) \cap (C) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 1)e^{2x} = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه : زوج إحداثيتي نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و  $(C)$  هو  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

**تحديد الوضع النسبي  $(\Delta)$  و  $(C)$  :**

لدينا :  $f(x) - (x + 1) = (2x - 1)e^{2x}$  و  $e^{2x} > 0$   
ومنه إشارة الفرق  $f(x) - (x + 1)$  هي إشارة  $2x - 1$ .

إذا كان  $x \geq \frac{1}{2}$  فإن  $f(x) - (x + 1) \geq 0$  ومنه  $(C)$  يوجد فوق  $(\Delta)$  على  $[\frac{1}{2}, +\infty[$ .

إذا كان  $x \leq \frac{1}{2}$  فإن  $f(x) - (x + 1) \leq 0$  ومنه  $(C)$  يوجد تحت  $(\Delta)$  على  $]-\infty, \frac{1}{2}]$ .

**4.أ.بين ان  $y = x$  معادلة مماس  $(C)$  في أصل المعلم :**

معادلة مماس  $(C)$  في النقطة التي أفصولها  $0$  هي :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$   
ولدينا  $f'(0) = 1$  و  $f(0) = 0$ .

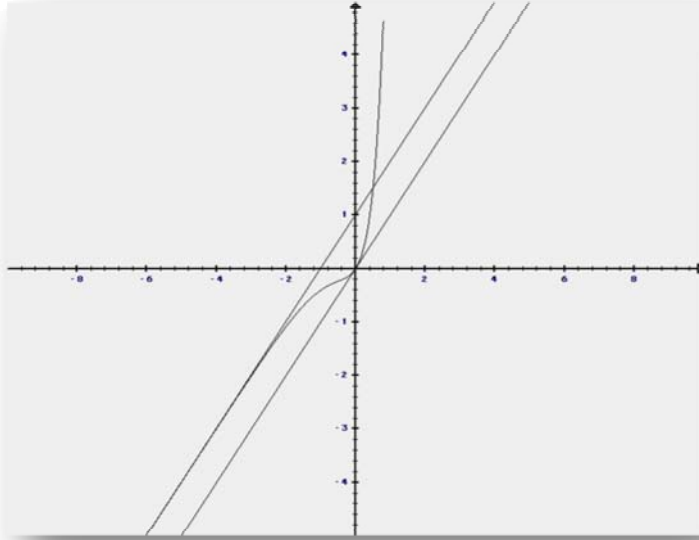
ومنه معادلة مماس  $(C)$  في أصل المعلم هي :  $y = x$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين على  $R$  ولدينا لكل  $x$  من  $R$  :  $f''(x) = g'(x)$   
وحسب الجزء الأول من التمرين فإن  $g'$  أي  $f''$  تنعدم في  $(\frac{-1}{2})$  وتغير إشارتها بجواره

ومنه النقطة التي أفصولها  $(\frac{-1}{2})$  تعتبر نقطة انعطاف  $(C)$ .

**5.إنشاء  $(\Delta)$  و  $(C)$  :**





6.أ. نحسب التكامل :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right. \text{ ولدينا : } \left\{ \begin{array}{l} u(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{array} \right. \text{ نضع}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1) e^{2x} dx &= \left[ \frac{2x - 1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \left( \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{e}{2} \end{aligned}$$

6.ب. لنحدد مساحة المستوى المحصور بين (C) والمستقيم (T)

بتأثير التعبير  $f(x) - x$  حيث  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  أو بتوظيف دراسة تقعر المنحنى نستنتج أن  $f(x) - x \geq 0$

مساحة الحيز المحصور بين (C) و (T) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين  $x = 0$  و  $x = \frac{1}{2}$  هي :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - x| dx \text{ ua} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} ((2x - 1)e^{2x} + 1) dx \times 4cm^2 \\ &= \left( \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \right) \times 4cm^2 \\ &= 4 \left( 1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \right) cm^2 \\ &= (6 - 2e) cm^2 \end{aligned}$$