

تقديم : ذ.العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

التمرين الأول :



http://www.vrac-colorpages.net

1-أ- نحل في R المعادلة : $x^2 + 4x - 5 = 0$.لتكن S مجموعة حلول المعادلة $x^2 + 4x - 5 = 0$.مميز المعادلة هو $\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) = 36$ بما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما :

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

ومنه : $S = \{-5, 1\}$ ب- نحل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$ ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$. و S مجموعة حلول المعادلة $\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$.

$$x \in S \Leftrightarrow \ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 5) = \ln((x + 2) \times 2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{أو} \quad x = -5$$

وبما أن x عنصر من $]0, +\infty[$ فإن $x = 1$.ومنه : $S = \{1\}$ 1) نحل في المجال $]0, +\infty[$ المتراجحة : $\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$ ليكن x عنصرا من $]0, +\infty[$. و S مجموعة حلول المتراجحة : $\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$

$$x \in S \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln x(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \geq x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

ومنه : $S = [1, +\infty[$

التمرين الثاني :

1) نبين أن : $u_n > 0$ لكل n من N

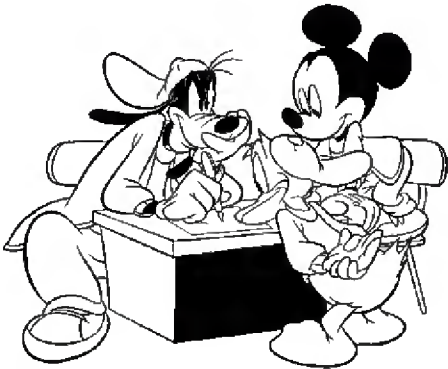
نستعمل الاستدلال بالترجع :

. من أجل n=0 لدينا $u_0 > 0$ لأن $u_0 = 1$.

. ليكن n من N .

نفترض أن $u_n > 0$. لنبين ان $u_{n+1} > 0$.بما أن $u_n > 0$ فإن $8u_n > 0$ و $5 + u_n > 0$

$$\text{وبالتالي } \frac{u_n}{5 + 8u_n} > 0 \quad \text{أي} \quad u_{n+1} > 0$$

. ومنه حسب مبدأ التراجع نستنتج أن $u_n > 0$ لكل n من N .

http://www.vrac-colorpages.net

(2) أ- نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 :

ليكن n من N .

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\frac{u_n}{5+8u_n}} + 2 = \frac{5+8u_n}{u_n} + 2 = \frac{5+10u_n}{u_n} = 5 \left(\frac{1+2u_n}{u_n} \right) = 5 \left(\frac{1}{u_n} + 2 \right) = 5v_n$$

وبالتالي $v_{n+1} = 5v_n$ لكل n من N

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها 5.

وحسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $v_n = v_0 \times 5^n$ لكل n من N

$$v_0 = \frac{1}{u_0} + 2 = 1 + 2 = 3$$

فإن

$$v_n = 3 \times 5^n \text{ لكل } n \text{ من } N.$$

ب- نبين أن $u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$ لكل n من N .

ليكن n من N

$$v_n = \frac{1}{u_n} + 2 \text{ إذن } v_n - 2 = \frac{1}{u_n} \text{ وبالتالي : } u_n = \frac{1}{v_n - 2}$$

$$\text{وبما أن : } v_n = 3 \times 5^n \text{ فإن } u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \text{ لكل } n \text{ من } N.$$

حساب نهاية (u_n) :

$$\text{لدينا } u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \text{ لكل } n \text{ من } N.$$

وبما أن : $5 > 1$ فإن $\lim 5^n = +\infty$

$$\text{وبالتالي : } \lim(3 \times 5^n - 2) = +\infty$$

ومنه

$$\lim u_n = 0$$



<http://www.vrac-colorpages.net>

التمرين الثالث

(1) نحل في C المعادلة : $z^2 - 18z + 82 = 0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة.

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 82 = -4 \text{ هو : مميز المعادلة}$$

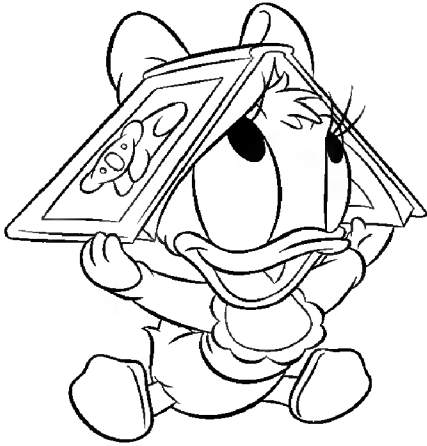
$$\text{بما أن } \Delta < 0 \text{ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : } z_1 = \frac{18-2i}{2} = 9-i \text{ و } z_2 = 9+i$$

$$\text{ومنه : } S = \{9-i, 9+i\}$$

(2) أ- نبين أن $\frac{c-b}{a-b} = -i$

$$\text{لدينا : } \frac{c-b}{a-b} = \frac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \frac{2-2i}{2i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{ومنه : } \frac{c-b}{a-b} = -i$$



<http://www.vrac-coloriages.net>

$$\frac{c-b}{a-b} = \left[1, \frac{-\pi}{2} \right] \text{ لدينا}$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-b}\right| = 1 \text{ إذن}$$

$$\overline{(\overline{BA}, \overline{BC})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و } \left|\frac{c-b}{a-b}\right| = 1 \text{ وبالتالي}$$

$$\overline{(\overline{BA}, \overline{BC})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و } \frac{BC}{BA} = 1 \text{ ومنه}$$

$$\overline{(\overline{BC}, \overline{BA})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و } BC = BA \text{ وبالتالي}$$

وهذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في B .

ب- نعط الشكل المثلثي للعدد $4(1-i)$:

معيار العدد $4(1-i)$ هو $4\sqrt{2}$. لدينا :

$$\begin{aligned} 4(1-i) &= 4 - 4i = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{4i}{4\sqrt{2}} \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

ومنه

$$\left[4\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \text{ الشكل المثلثي للعدد } 4(1-i) \text{ هو } 4\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right) \text{ أي}$$

$$\text{ج- نبين أن : } (c-a)(c-b) = 4(1-i)$$

لدينا

$$(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i) = (2-2i)(2) = 4(1-i)$$

$$(c-a)(c-b) = 4(1-i) \text{ لدينا استنتاج}$$

$$\text{إذن : } |(c-a)(c-b)| = |4(1-i)|$$

$$\text{وبالتالي : } |(c-a)(c-b)| = 4\sqrt{2} \text{ ومنه : } AC \times AB = 4\sqrt{2}$$

$$\text{د- نبين أن : } z' = -iz + 10 + 8i$$

لدينا :

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b) + b$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) (z-9+i) + 9-i$$

$$\Leftrightarrow z' = -i(z-9+i) + 9-i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 9i + 1 + 9 - i$$

$$\text{ومنه : } z' = -iz + 10 + 8i$$

نتحقق من أن لحق C' صورة C بالدوران R هو $9-3i$.

لدينا : C' صورة C بالدوران R

$$\text{إذن : } z_{C'} = -iz_C + 10 + 8i = -i(11-i) + 10 + 8i = -11i + i^2 + 10 + 8i = 9 - 3i$$

ومنه : لحق C' صورة C بالدوران R هو $9-3i$.

التمرين الرابع :

الجزء 1:

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

(1) أنبين أن $g'(x) = -xe^x$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا : $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -e^x + e^x - xe^x = -xe^x$

ب-نبين أن g تزايدية على $]-\infty, 0]$ وتناقصية على $[0, +\infty[$:

نعلم أن $e^x > 0$ لكل x من R .

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(-x)$

وبالتالي $g'(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty, 0]$ و $g'(x) \leq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$.

ومنه : g تزايدية على $]-\infty, 0]$ وتناقصية على $[0, +\infty[$.

ولدينا : $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

(2) نستنتج أن : $g(x) \leq 0$ لكل x من R

ليكن x من R

إذا كان $x \geq 0$ فإن $g(x) \leq g(0)$ لأن g تناقصية على $[0, +\infty[$.

إذا كان $x \leq 0$ فإن $g(x) \leq g(0)$ لأن g تزايدية على $]-\infty, 0]$.

ومنه مهما يكن x في R لدينا : $g(x) \leq g(0)$

وبالتالي : $g(x) \leq 0$ لكل x من R (لأن $g(0) = 0$)



<http://www.vrac-colorpages.net>

الجزء 2:

$$f(x) = (2-x)e^x - x$$

(1) أنبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2-x}{x} e^x - 1 \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1 \right]$$

$$\text{وحيث أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^x = -\infty$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1 = -\infty \text{ وبالتالي : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

ب-نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1 \quad \text{لدينا}$$

$$= -\infty$$



<http://www.vrac-colorpages.net>

هندسيا المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب جوار $(+\infty)$.

(2) أ- نبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$:

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x$$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x) \quad \text{إذن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$$

ب- نبين أن المستقيم المعرف بالمعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $(-\infty)$.

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0$$

إذن : المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $(-\infty)$.

(3) أ- نبين ان $f'(x) = g(x)$ لكل x من \mathbb{R} :

الدالة f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ولكل x من \mathbb{R} لدينا :

$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x - 1 = -e^x + 2e^x - xe^x - 1 = e^x - xe^x - 1 = g(x)$$

ب- تأويل هندسي للنتيجة $f'(0) = 0$:

النتيجة $f'(0) = 0$ تعني هندسياً أن المنحنى (C) يقبل في النقطة ذات الأفصول 0 مماساً أفقياً.

ج- لدينا $f'(x) = g(x)$ لكل x من \mathbb{R} .

بما أن $g(x) \leq 0$ لكل x من \mathbb{R} و $f'(x) = g(x)$ لكل x من \mathbb{R} فإن $f'(x) \leq 0$ لكل x من \mathbb{R} .
ومنه f تناقصية على \mathbb{R} .

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	-	
f	$+\infty$	↘		$-\infty$

(4) نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في \mathbb{R} وأن $\frac{3}{2} < \alpha < 2$:

الدالة f متصلة وتناقصية قطعاً على \mathbb{R}

$$\text{إذن } f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f \right[=]-\infty, +\infty[$$

وبما أن العدد 0 عنصر من $]-\infty, +\infty[$ فإنه يقبل سابقاً وحيداً α بالدالة f في \mathbb{R} .

وبالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في \mathbb{R} .

$$\text{وحيث أن } f\left(\frac{3}{2}\right) \times f(2) < 0 \quad \left(\text{لأن } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 3}{2} > 0 \text{ و } f(2) < 0 \right)$$

فإن $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ وذلك حسب مبرهنة القيم الوسيطة.

(5) أ- نحل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) + x = 0$:

ليكن x عدداً حقيقياً و S مجموعة حلول المعادلة.

$$x \in S \Leftrightarrow f(x) + x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x)e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 0$$



لأن $e^x > 0$ لكل x من \mathbb{R} .

ومنه $x \in S = 0 \Leftrightarrow x = 2$ وبالتالي $S = \{2\}$

. استنتاج: لنكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى. لدينا :

$$\begin{aligned} M \in (C) \cap (D) &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (C) \\ M \in (D) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -x \\ y = -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه تقاطع (C) و (D) هو النقطة التي زوج إحداثياتها $(2, -2)$.

ب- لندرس إشارة $f(x) + x$ على \mathbb{R} :

لدينا $f(x) + x = (2 - x)e^x$

إشارة $(2 - x)e^x$ هي إشارة $(2 - x)$.

وبالتالي

إذا كان $x \leq 2$ فإن $2 - x \geq 0$ ومنه $0 \leq f(x) + x$.

إذا كان $x \geq 2$ فإن $2 - x \leq 0$ ومنه $f(x) + x \leq 0$.

استنتاج :

لدينا: $f(x) + x > 0$ لكل x من $]-\infty, 2[$ ومنه $f(x) - (-x) > 0$ لكل x من $]-\infty, 2[$ وعليه فإن (C) يوجد فوق (D) على $]-\infty, 2[$
لدينا: $f(x) + x < 0$ لكل x من $]2, +\infty[$ ومنه $f(x) - (-x) < 0$ لكل x من $]2, +\infty[$ وعليه فإن (C) يوجد تحت (D) على $]2, +\infty[$.

(6) أسيين أن (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثياتها $(0, 2)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على \mathbb{R} ولكل x من \mathbb{R} لدينا $f''(x) = g'(x)$

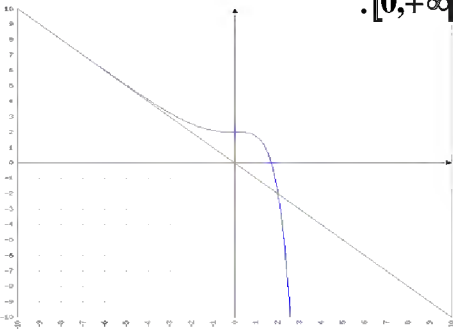
ومن خلال الجزء الأول للتمرين نستنتج أن :

$f''(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty, 0]$ و $f''(x) \leq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$.

ومنه f'' تنعدم في 0 وتغير إشارتها بجواره

وبالتالي المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثياتها $(0, 2)$.

ب- إنشاء (D) و (C) :



(7) أ- حساب التكامل $\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx$:

$$\begin{cases} u(x) = 2-x \\ v(x) = e^x \end{cases} \quad \text{نضع :} \quad \text{إن :} \quad \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx &= [(2-x)e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^x dx \\
&= [(2-0)e^0 - (2-(-1))e^{-1}] + \int_{-1}^0 e^x dx \\
&= 2 - 3e^{-1} + [e^x]_{-1}^0 \\
&= 2 - 3e^{-1} + e^0 - e^{-1} \\
&= 2 - 3e^{-1} + 1 - e^{-1} \\
&= 3 - 4e^{-1} \\
&= 3 - \frac{4}{e}
\end{aligned}$$

ب- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$ هي

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 [f(x) - (-x)] dx &= \int_{-1}^0 (2-x)e^x dx \text{ ua} \\
&= \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{cm}^2
\end{aligned}$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق
wadiifi@hotmail.com



<http://www.arnac-college.net/>



<http://www.arnac-college.net/>

