

التمرين الأول :

1) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$

لدينا :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$$

ومنه مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1;0;1)$ وشعاعها $\sqrt{3}$.

2) أ- بين أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ وتحقق من أن $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

. لدينا :

$$\vec{AB}(-1;0;-1)$$

$$\vec{AC}(2;1;2)$$

و

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

نعلم أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل $x - z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا A نقطة من المستوى (ABC) إذن : $1 - (-1) + d = 0$ أي : $d = -2$.

ومنه $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).



http://www.yepi.com

ب- تحقق من أن $d(\Omega; (ABC)) = \sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1

$$d(\Omega; (ABC)) = \frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

. المسافة بين Ω والمستوى (ABC) أصغر قطعا من شعاع الفلكة .

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$$

إذن المستوى يقطع (ABC) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1 .

(3)

$$\text{أ- بين أن } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta)$$

المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) والمتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

إذن المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ موجهة للمستقيم (Δ)

ولدينا (Δ) مار من النقطة $\Omega(1;0;1)$.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ومنه تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو

ب - بين أن مثلث إحداثيات HH نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(2,0,0)$

ليكن $(x;y;z)$ مثلث إحداثيات H :

$$H \in (ABC) \cap (\Delta) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ x-y-2=0 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

نعوض x و y و z بدلالة t في معادلة المستوى (ABC) فنجد $(1+t)-(1-t)-2=0$ أي $t=1$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{نعوض } t \text{ بقيمتها في التمثيل البارمترى للمستقيم } (\Delta) \text{ فنجد}$$

ومنه مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) هو $(2;0;0)$.

ج - استنتج مركز الدائرة (Γ)

نعلم أن مركز الدائرة (Γ) هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC) ، أي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC)

ومنه : مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $H(2;0;0)$

التمرين الثاني :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 12z + 61 = 0$

ميز المعادلة هو $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = -100$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_2 = 6 + 5i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{12 - i\sqrt{100}}{2} = 6 - 5i$$

ومنه : $S = \{ 6 - 5i ; 6 + 5i \}$

(2)

أ- احسب $\frac{a-c}{b-c}$ واستنتج أن النقط A و B و C مستقيمة .

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{4-6i}{2-3i} = \frac{(4-6i)}{(2-3i)} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2 \quad \text{لدينا :}$$

بما أن $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمة .

ب- تحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d = 3 + 6i$

لدينا : $D = T(C)$

$$\text{إذن : } z_D = z_C + z_u = 2 + i + 1 + 5i = 3 + 6i$$



$$\text{ج- بين أن : } \frac{d-c}{b-c} = -1+i \text{ و أن } \frac{3\pi}{4} \text{ عمدة للعدد العقدي } -1+i$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+10i-15}{4+9} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i$$

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ولدينا :

$$= \sqrt{2} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

ومنه $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$.

د - استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{CB}; \overline{CD})$



$$(\overline{CB}; \overline{CD}) \equiv \arg \frac{d-c}{b-c} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \arg(-1+i) \quad [2\pi]$$

لدينا :

$$\equiv \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$$

التمرين الثالث :

ليكن Ω كون الإمكانيات.

السحب يتم تانيا إذن كل سحبة عبارة عن تأليفة لثلاث عناصر من بين ثمانية . وبالتالي : $\text{card}\Omega = C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

$$(1) \text{ بين أن : } P(A) = \frac{5}{28}$$

الحدث A هو سحب كرة تحمل العدد 0 و كرة تحمل العدد 1 و كرة تحمل العدد 2 . وبالتالي : $\text{card}A = C_1^1 \times C_2^1 \times C_5^1 = 10$

$$\text{ومنه : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

$$(2) \text{ بين أن : } P(B) = \frac{5}{56}$$

الحدث B هو سحب كرة تحمل العدد 1 وعدد الإمكانيات هو C_5^1 وكرتين تحملان العدد 2 وعدد الإمكانيات هو C_2^2 .

وبالتالي : $\text{card}B = C_2^2 \times C_5^1 = 5$

$$\text{ومنه : } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{5}{56}$$

$$(3) \text{ بين أن : } P(C) = \frac{3}{8}$$

الحدث C هو سحب كرة تحمل العدد 2 وعدد الإمكانيات هو C_2^2 وكرتين تحملان العدد 1 وعدد الإمكانيات هو C_5^2

أو سحب كرتين تحملان العدد 2 وعدد الإمكانيات C_2^2 و كرة تحمل العدد 0 وعدد الإمكانيات C_1^1 .

وبالتالي $\text{card}C = C_2^2 C_5^2 + C_2^2 C_1^1 = 21$. ومنه : $p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$

التمرين الرابع :

(1) تحقق من أن : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ لكل n من \mathbb{N}

ليكن n من \mathbb{N}

$$u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12-132}{11} = \frac{10}{11}u_n - \frac{120}{11} = \frac{10}{11}(u_n - 12)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) \text{ ومنه :}$$

(2) أ- بين بالترجع أن : $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N}

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 < 12$ لأن $u_0 = 11$.

ليكن n من \mathbb{N}

نفترض أن : $u_n < 12$ لنبين أن : $u_{n+1} < 12$.

$$u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$$

بما أن : $u_n < 12$ فإن $u_n - 12 < 0$ وبالتالي $u_{n+1} - 12 < 0$ أي أن $u_{n+1} < 12$

ومنه : $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N} .

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

ليكن n من \mathbb{N}

$$u_{n+1} - u_n = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - u_n = \frac{12 - u_n}{11}$$

لدينا : $u_n < 12$ إذن $12 - u_n > 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ لكل n من \mathbb{N} .

ومنه : (u_n) تزايدية قطعا .

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

المتتالية (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 12

إذن : (u_n) متقاربة .

(3) أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ليكن n من \mathbb{N}

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) = \frac{10}{11}v_n$$

إذن : $v_{n+1} = \frac{10}{11}v_n$ لكل n من \mathbb{N} .



حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا $v_n = v_0 \times \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من N .

أي أن : $v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$ لأن $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$.

ب- بين أن : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من N ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

لدينا : $v_n = u_n - 12$ إذن : $u_n = v_n + 12$ وبالتالي : $u_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n + 12$

ومنه : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من N .

لدينا : $1 < \frac{10}{11} < -1$ إذن $\lim\left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$ وبالتالي : $\lim u_n = 12$

ومنه : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من N و $\lim u_n = 12$

التمرين الخامس :

(1) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0,1[$ ثم استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0,1[$

ليكن x من $]0,1[$

لدينا $2x^2 > 0$ إذن إشارة $2x^2 \ln x$ هي إشارة $\ln x$.

لدينا $0 < x < 1$ إذن $x^2 < 1$ أي $x^2 - 1 < 0$ ونعلم أن $\ln x < 0$ على $]0,1[$.

ومنه للعددين $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ نفس الإشارة على المجال $]0,1[$.

استنتاج :

العددان $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ سالبان قطعاً على المجال $]0,1[$.

وبالتالي : $x^2 - 1 + 2x^2 \ln x < 0$ لكل x من المجال $]0,1[$.

ومنه : $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0,1[$.



(2) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1,+\infty[$ ثم استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]1,+\infty[$

ليكن x من $]1,+\infty[$

لدينا $1 < x$ إذن $x^2 > 1$ إذن $x^2 - 1 > 0$ ونعلم أن $\ln x > 0$ على $]1,+\infty[$.

ومنه للعددين $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ نفس الإشارة على المجال $]1,+\infty[$.

استنتاج :

العددان $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ موجبان قطعاً على المجال $]1,+\infty[$.

وبالتالي : $x^2 - 1 + 2x^2 \ln x \geq 0$ لكل x من المجال $]1,+\infty[$.

ومنه : $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]1,+\infty[$.

(1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$.
 وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 3cm) .
 1- أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ وأول هذه النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

هندسيا : محور الأرتيب مقارب لمنحنى الدالة f .

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (يمكنك كتابة $\frac{f(x)}{x}$ على الشكل $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x$)
 واستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} \ln x$$

$$\text{وبما أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

استنتاج :

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

فإن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب جوار $(+\infty)$.



(2) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0, -\infty[$ وأول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$

لكل x من $]0, +\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = (x^2 - 1)' \ln x + (x^2 - 1)(\ln x)' = 2x \ln x + (x^2 - 1) \frac{1}{x} = \frac{2x^2 \ln(x) + x^2 - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

تأويل هندسي : $f'(1) = 0$ يعني أن المنحنى (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة ذات الأفضول 1.

ب- استنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1[$ و تزايدية على المجال $]1, +\infty[$

لدينا x من $]0, +\infty[$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

وبما أن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0, 1[$ و $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]1, +\infty[$.

وبالتالي : الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1[$ و تزايدية على المجال $]1, +\infty[$.

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ ثم بين أن $f(x) \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

. جدول تغيرات f هو :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

.. الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

إذن العدد $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $]0;+\infty[$.

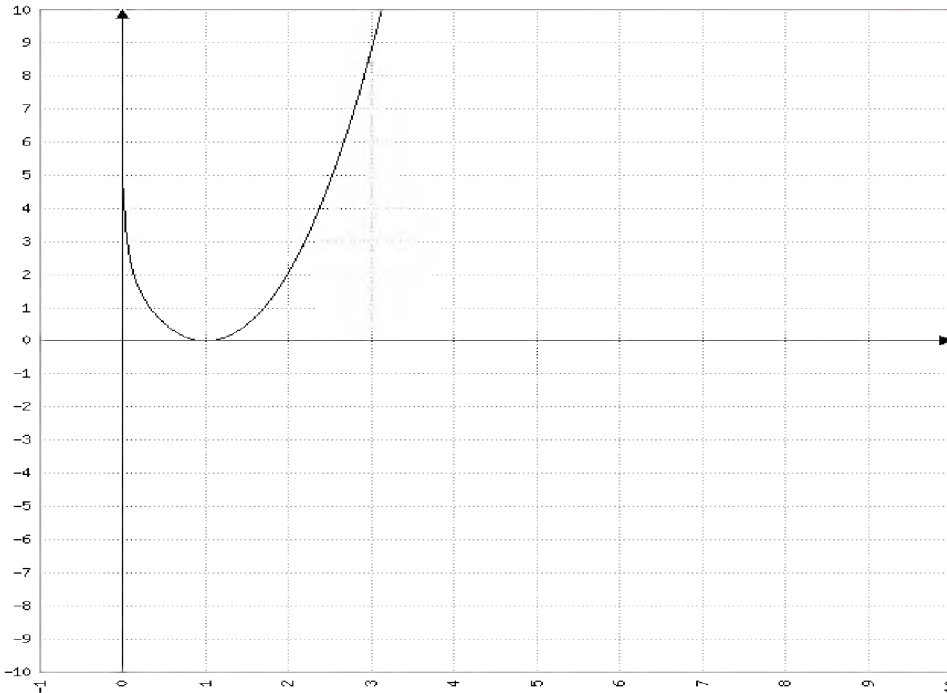
أي أن : $f(x) \geq f(1)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ومنه $f(x) \geq 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.



http://www.cartoonists.net

(3) أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})



(4) ا- بين أن $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على \mathbb{R}

الدالة u قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} باعتبارها دالة حدودية .

ولدينا : $u'(x) = 3 \frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$ لكل x من \mathbb{R} .

إذن : u دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على \mathbb{R} .

$$\text{ب- باستخدام مكاملة بالأجزاء بين أن : } \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$$

$$\text{نضع : } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 - 1 \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx &= \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) \, dx \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \left[\frac{x^3}{9} - x \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \left(\left(\frac{8}{9} - 2 \right) - \left(\frac{1}{9} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2) \end{aligned}$$

ج- احسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأضلاع والمستقيمين النذيين معادلتهما $x=2$ و $x=1$

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأضلاع والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=2$ و $x=1$ هي :

$$s = \int_1^2 f(x) \, dx \text{ ua}$$

ولدينا : $f(x) \geq 0$ لكل x من المجال $[1;2]$ إذن : $s = \int_1^2 f(x) \, dx \text{ ua}$

$$\text{ولدينا : } \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2) \text{ و } \|\vec{i}\|^2 = 9cm^2$$

$$\text{ومنه } s = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2) \times 9cm^2 = 2(1 + 3 \ln 2)cm^2$$

