Yassine Mghazli

التمرين الأول

1) لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}-3=\dfrac{3+u_n}{5-u_n}-3=\dfrac{3+u_n-3(5-u_n)}{5-u_n}=\dfrac{-12+4u_n}{5-u_n}=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

إذن

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}}$$

برهان بالترجع:

* من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ إذن $u_0<3$

* ليكن n من $\mathbb{N}$. نفترض أن $u_n<3$ و نبين أن $u_{n+1}<3$

لدينا $u_n<3\Rightarrow \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}<0$ إذن $u_{n+1}-3<0$ ومنه $u_{n+1}<3$

* حسب مبدأ الترجع نستنتج أن

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});u_n<3}$$

2) أ) لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}}=\dfrac{\dfrac{3+u_n}{5-u_n}-1}{3-\dfrac{3+u_n}{5-u_n}}=\dfrac{3+u_n-(5-u_n)}{3(5-u_n)-(3+u_n)}=\dfrac{2u_n-2}{12-4u_n}=\dfrac{u_n-1}{2(3-u_n)}=\dfrac{1}{2}v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-1}{3-u_0}=1$ و منه $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=v_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\boxed{(v_n)\ \text{متتالية هندسية أساسها}\ \frac{1}{2}\ \text{و}\ (\forall n\in\mathbb{N});v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ب) لدينا

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N});v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}&\Leftrightarrow v_n(3-u_n)=u_n-1\\&\Leftrightarrow 3v_n+1=u_nv_n+u_n\\&\Leftrightarrow 3v_n+1=u_n(v_n+1)\\&\Leftrightarrow u_n=\frac{3v_n+1}{v_n+1}\end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\frac{3v_n+1}{v_n+1}}$$

و منه

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}}$$

y_mghazli@hotmail.com

Yassine Mghazli

ج) بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و منه

$$\boxed{\lim u_n=1}$$

التمرين الثاني

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,-2)$

إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

و منه

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}$$

ب) بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ منظمية على المستوى (ABC) فإن معادلته الديكارتية تكتب على الشكل

$2x+2y+z+d=0$ و بما أن $A(3,1,1)\in(ABC)$ فإن $6+2+1+d=0$ ومنه $d=-9$

نستنتج أن

$\boxed{2x+2y+z-9=0 \text{ هي معادلة ديكارتية المستوى } (ABC)}$

2) أ) لدينا $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+z^2-36=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6^2$$

معادلة الفلكة (S) هي $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6^2$

نستنتج أن

$\boxed{\text{مركز } (S) \text{ هو } \Omega(1,-1,0) \text{ و شعاعها } R=6}$

ب) لدينا $d(\Omega,(ABC))=\frac{|2-2+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3$

إذن

$$\boxed{d(\Omega,(ABC))=3}$$

بما أن $d(\Omega,(ABC))<R$ فإن

$\boxed{\text{المستوى } (ABC) \text{ يقطع الفلكة } (S) \text{ وفق دائرة}}$

3) أ) بما أن (Δ) عمودي على المستوى (ABC) فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ موجهة له ولدينا $\Omega(1,-1,0)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري ل (Δ) يكتب:

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=2t+1\\y=2t-1;t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}}$$

y_mghazli@hotmail.com

Yassine Mghazli

ب) مركز الدائرة (Γ) هو تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) أي النقطة التي بارامترها t يحقق:

$2(2t+1)+2(2t-1)+t-9=0$ و هذه المعادلة تكافئ $9t=9$ أي $t=1$

النقطة التي بارامترها 1 هي B نستنتج أن

$\boxed{\text{مركز الدائرة } (\Gamma) \text{ هو } B}$

التمرين الثالث

1) لدينا

$$z\in\mathbb{C};\ z^2-4z+29=0 \Leftrightarrow (z-2)^2+25=0$$

$$\Leftrightarrow (z-2)^2-(5i)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (z-2-5i)(z-2+5i)=0$$

إذن

$$z^2-4z+29=0 \Leftrightarrow ((z-2+5i)=0 \text{ أو } (z-2-5i)=0)$$

$$\Leftrightarrow (z=2-5i \text{ أو } z=2+5i)$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $z^2-4z+29=0$ هي:

$$\boxed{S=\{2-5i,2-5i\}}$$

2) أ) لدينا $u=b-\omega=5+8i-2-5i=3+3i$ إذن

$$\boxed{u=3+3i}$$

ولدينا $u=3+3i=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ومنه

$$\boxed{\arg u\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

ب) لدينا $\bar{u}=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ إذن

$$\boxed{\arg\bar{u}\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

ج) لدينا $a-\omega=5+2i-2-5i=2-3i=\bar{u}$ إذن

$$\boxed{a-\omega=\bar{u}}$$

و لدينا $|a-\omega|=\Omega A$ و $|\bar{u}|=|u|=|b-\omega|=\Omega B$

إذن $\Omega A=\Omega B \Leftarrow |a-\omega|=|\bar{u}| \Leftarrow a-\omega=\bar{u}$ و بالتالي

$$\boxed{\Omega A=\Omega B}$$

y_mghazli@hotmail.com

Yassine Mghazli

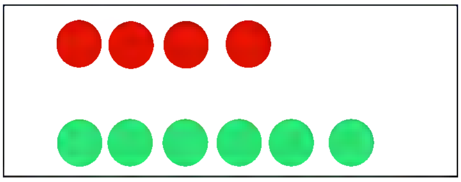
د) الدوران R مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن صيغته العقدية هي $z' = i(z-\omega)+\omega$

لدينا $\text{aff}\,(R(A)) = i(a-\omega)+a = i\bar{u}+5+2i = i(3-3i)+5+2i = 8+5i$

ومنه

$\boxed{\text{صورة } A \text{ بالدوران } R \text{ هي النقطة } A'(5,8)}$

التمرين الرابع



1) ليكن Ω هو كون الامكانيات المرتبط بهذه التجربة

لدينا $\frac{2}{15} = \frac{6}{45} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = p(A)$ و منه

$$\boxed{p(A) = \frac{2}{15}}$$

2) أ) لدينا عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الصندوق هو 0 أو 1 أو 2 إذن عدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق هو : $4-0$ أو $4-1$ أو $4-2$ و منه

$\boxed{\text{مجموعة القيم الممكنة ل } X \text{ هي } \{2,3,4\}}$

ب) لدينا $\frac{3}{15} = \frac{4\times 6}{45} = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = p(X=3)$ ومنه

$$\boxed{p(X=3) = \frac{3}{15}}$$

التمرين الخامس

I) 1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x-2+e^{4x}-4e^x = -\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{4x} = \lim_{x\to-\infty} -4e^x = 0$

إذن

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

ب)لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2) = \lim_{x\to+\infty} e^{4x}-4e^x = 0$

إذن

$\boxed{\text{المستقيم ذو المعادلة } y=2x-2 \text{ مقارب مائل ل } (C_f) \text{ بجوار } -\infty}$

y_mghazli@hotmail.com

2أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^x\left(e^{3x}-4\right)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} 2x-2=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(e^{3x}-4\right)=+\infty$

Yassine Mghazli

و منه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{2}{x}+\frac{e^x}{x}\left(e^{3x}-4\right)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-4\right)=+\infty$

و منه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty}$$

نستنتج أن

$\boxed{(C_f)\text{ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار } -\infty}$

3) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=2+2e^{2x}-4e^x=2\left(1-2e^x+\left(e^x\right)^2\right)=2\left(e^x-1\right)^2$$

ومنه

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=2\left(e^x-1\right)^2}$$

ب) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

ج) الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $f(\mathbb{R})$ مع $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

بما أن $0\in\mathbb{R}$ فإن ل 0 سابق وحيد α ب f

و بما أن $f(1)=e^2-4e=e(e-4)<0$ و

$$f(\ln 4)=2\ln 4-2+e^{2\ln 4}-4e^{\ln 4}=2\ln 4-2+16-16=2(\ln 4-1)>0$$

فإن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\alpha\in\left]1,\ln 4\right[$

y_mghazli@hotmail.com

Yassine Mghazli

نستنتج أن:

$$\boxed{\exists!\alpha \in]1,\ln 4[\,;\ f(\alpha)=0}$$

4) أ) لندرس إشارة $f(x)-(2x-2)$

لدينا $f(x)-(2x-2)=e^x(e^x-4)$

إذن

$$(\forall x \in]\ln 4,+\infty[);\ x>\ln 4 \Rightarrow e^x>4$$
$$\Rightarrow e^x(e^x-4)>0$$
$$\Rightarrow f(x)>2x-2$$

نستنتج أن

$\boxed{C_f}$ يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4,+\infty[$

و

$$(\forall x \in]1,\ln 4[);1<x<\ln 4 \Rightarrow e^x<4$$
$$\Rightarrow e^x(e^x-4)<0$$
$$\Rightarrow f(x)<2x-2$$

نستنتج أن

C_f يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $]1,\ln 4[$

ب) الدالة قابلة f للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و لدينا $(\forall x\in\mathbb{R});\ f''(x)=4e^x(e^x-1)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها عند 0 إذن النقطة $I(0,f(0))$ هي نقطة انعطاف ل C_f

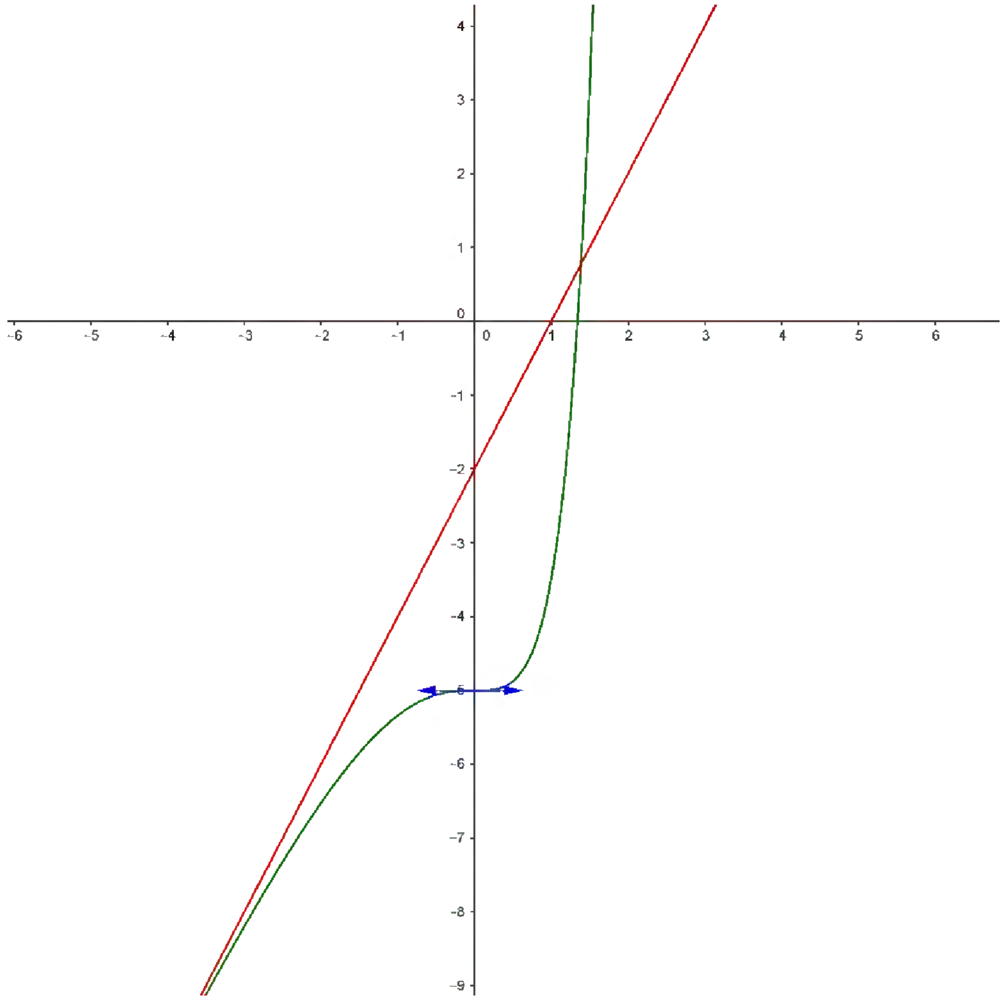
ولدينا $f(0)=5$ نستنتج أن

ل (C_f) نقطة انعطاف وحيدة زوج احداثيتيها هو $(0,5)$

y_mghazli@hotmail.com

Yassine Mghazli

ج) المنحنى (C_f) و المستقيم (D)



5) أ) $\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x\right]_0^{\ln 4}=\frac{1}{2}\times 16-16-\frac{1}{2}+4=8-16+4-\frac{1}{2}=-4-\frac{1}{2}=-\frac{9}{2}$

إذن

$$\boxed{\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=-\frac{9}{2}}$$

ب) لتكن S هي المساحة المطلوبة

لدينا $S=\left(\int_0^{\ln 4}\left(2x-2-f(x)\right)dx\right)cm^2$ و لدينا $\int_0^{\ln 4}\left(2x-2-f(x)\right)dx=-\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=\frac{9}{2}$

نستنتج أن

$$\boxed{S=\frac{9}{2}cm^2}$$

y_mghazli@hotmail.com

Yassine Mghazli

II) 1) أ) $(E): y''-3y'+2y=0$

المعادلة المميزة ل (E) هي $r^2-3r+2=0$ وتقبل حلين مختلفين $r_1=1$ و $r_2=2$

إذن

$$\boxed{\text{الحل العام للمعادلة } (E) \text{ هو } y=\alpha e^{x}+\beta e^{2x} \text{ مع } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$$

ب) g حل للمعادلة (E) إذن يوجد α و β من $\mathbb{R}$ بحيث $g(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{2x}$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(\forall x\in\mathbb{R})\ g'(x)=\alpha e^{x}+2\beta e^{2x}$

لدينا $\begin{cases} g(0)=-3 \\ g'(0)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-3 \\ \alpha+2\beta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=-4 \end{cases}$

نستنتج ان

$$\boxed{g \text{ هي الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ ب } g(x)=-4e^{x}+e^{2x}}$$

2)أ)لدينا $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)=\ln\left(f(x)-(2x-2)\right)$

الدالة $x\to f(x)-(2x-2)$ موجبة و قابلة للاشتقاق على $]\ln 4,+\infty[$ إذن h قابلة للاشتقاق على $]\ln 4,+\infty[$ و لدينا

$$(\forall x\in]\ln 4,+\infty[);h'(x)=\frac{f'(x)-2}{f(x)-(2x-2)}=\frac{2\left((e^{x}-1)^2-1\right)}{f(x)-(2x-2)}=\frac{2e^{x}(e^{x}-2)}{f(x)-(2x-2)}>0$$

(لأن $x>\ln 4\Rightarrow e^{x}>4$)

نستنتج أن الدالة h متصلة و تزايدية قطعا على $]\ln 4,+\infty[$ إذن تقابل من $]\ln 4,+\infty[$ نحو $h(]\ln 4,+\infty[)$

و لدينا $h(]\ln 4,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} h(x),\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[=\mathbb{R}$

ومنه

$$\boxed{\text{الدالة } h \text{ تقبل دالة عكسية } h^{-1} \text{ معرفة على } \mathbb{R}}$$

ب) لدينا $h(\ln 5)=\ln\left(e^{2\ln 5}-4e^{\ln 5}\right)=\ln\left(5^2-4\times 5\right)=\ln 5$

و $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)=\dfrac{1}{h'\left(h^{-1}(\ln 5)\right)}$

بما أن $h(\ln 5)=\ln 5$ فإن $h^{-1}(\ln 5)=\ln 5$ و لدينا $h'(\ln 5)=\dfrac{2e^{\ln 5}\left(e^{\ln 5}-1\right)}{e^{\ln 5}\left(e^{\ln 5}-4\right)}=\dfrac{2\times 5(5-2)}{5(5-4)}=6$

نستنتج أن $\boxed{h(\ln 5)=\ln 5 \text{ و } \left(h^{-1}\right)'(\ln 5)=6}$