



التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقط $A(2,0,-1)$ و $B(2,4,2)$ و $C(3,3,3)$ و الفلكة (S) التي معادلتها الديكارتية هي : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z + 20 = 0$ (1) نبين ان مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(2,2,4)$ أن شعاعها يساوي 2

$$\forall M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x) + (y^2 - 4y) + (z^2 - 8z) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + (z^2 - 8z + 16) - 16 + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 2^2$$

إذن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(2,2,4)$ و شعاعها $R=2$.

(2) نبين أن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x - y + z - 1 = 0$ معادلة المستوى (P) تكتب على الشكل $ax + by + cz + d = 0$ حيث $\vec{n}(a, b, c)$ متجهة منظمية عليه.

لدينا $B(2,4,2)$ و $C(3,3,3)$ إذن $\overline{BC}(1,-1,1)$

لدينا المستوى (P) عمودي على المستقيم (BC) إذن المتجهة $\overline{BC}(1,-1,1)$ منظمية على (P)

ومنه فإن معادلة (P) هي $x - y + z + d = 0$

لدينا المستوى (P) يمر من النقطة $A(2,0,-1)$ إذن $2 - 0 + (-1) + d = 0$ أي $d = -1$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x - y + z - 1 = 0$.

(3) أ - نبين أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها يساوي 1.

لدينا معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x - y + z - 1 = 0$ ومركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(2,2,4)$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|2 - 2 + 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

لدينا $R = 2$ ولدينا

بما أن $d(\Omega, (P)) < R$ إذن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها r حيث :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$$

ب - نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (P) .

لدينا معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x - y + z - 1 = 0$ إذن $\vec{n}(1, -1, 1)$ متجهة منظمية عليه.

لدينا المستقيم (Δ) عمودي على (P) إذن $\vec{n}(1, -1, 1)$ موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) المار من النقطة $\Omega(2,2,4)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{n}(1, -1, 1)$ هو :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

ج - نحدد مثلث إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة (Γ) .

ω مركز الدائرة (Γ) هي تقاطع (Δ) و (P) .

$$\{\omega\} = (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow \omega \in (P) \text{ و } \omega \in (\Delta)$$

$$\Leftrightarrow (1) : x - y + z - 1 = 0 \text{ و } (2) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

$$(2+t) - (2-t) + (4+t) - 1 = 0$$

$$t = -1$$

نعوض (2) في (1) نحصل على :

نعوض قيمة $t = -1$ في (2) نحصل على

$$\begin{cases} x = 2 + (-1) = 1 \\ y = 2 - (-1) = 3 \\ z = 4 + (-1) = 3 \end{cases}$$

إذن $\omega(1,3,3)$.

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على ثلاث بيد قات بيضاء و أربع بيد قات سوداء (لا يمكن التمييز بين البيد قات باللمس).
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيد قات من الكيس .

$$\text{card}(\Omega) = C_7^3 = 35 \text{ لدينا}$$

(1) الحدث A " الحصول على بيدقتين بالضبط لونهما أبيض " أي (B, B, N)

$$\text{card}(A) = C_3^2 \cdot C_4^1 = 12 \text{ لدينا} \quad \text{إذن} \quad p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{12}{35}$$

(2) الحدث B " الحصول على ثلاث بيد قات من نفس اللون " أي (N, N, N) أو (B, B, B)

$$\text{card}(B) = C_3^3 + C_4^3 = 1 + 4 = 5 \text{ لدينا} \quad \text{إذن} \quad p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

(3) الحدث C " الحصول على بيدقة بيضاء على الأقل "

الحدث المضاد \bar{C} "عدم الحصول على أية بيدقة بيضاء " يعني (البيد قات الثلاث المسحوبة سوداء)

$$\text{card}(\bar{C}) = C_4^3 = 4 \text{ لدينا} \quad \text{إذن} \quad p(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{35}$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C})$$

$$= 1 - \frac{4}{35}$$

$$= \frac{31}{35}$$

التمرين الثالث:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$ لكل n من \mathbb{N} .

نضع $v_n = u_n + n - 1$ لكل n من \mathbb{N} .

(1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1) - 1$$

$$= \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) + n$$

$$= \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1 + 5n)$$

$$= \frac{1}{5}(u_n + n - 1)$$

$$= \frac{1}{5}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

(2) أ - نحسب v_n بدلالة n .

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ و حدها الأول $q = \frac{1}{5}$ و $v_0 = u_0 + 0 - 1 = 2 - 1 = 1$ إذن $v_n = v_0 \cdot q^n$ أي $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

ب- استنتاج u_n بدلالة n ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

0,5

لدينا $v_n = u_n + n - 1$ إذن $u_n = v_n - n + 1$. ومنه فإن $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n - n + 1$

لدينا $-1 < \frac{1}{5} < 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ و لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-n + 1) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ (3)

نبين أن : $T_n = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$

1

$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$= 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$

$= \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

$= \frac{1}{4} \left(5 - 5 \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

$= \frac{1}{4} \left(5 - 5 \cdot \frac{1}{5^{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$

نبين أن $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

لدينا $u_n = v_n - n + 1$ إذن :

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= (v_0 - (-1)) + (v_1 - 0) + (v_2 - 1) + \dots + (v_n - (n-1))$

$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - ((-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1))$

$= T_n - \frac{((-1) + (n-1))(n+1)}{2}$

$= T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

التمرين الرابع:

(1) نتحقق من أن : $(\sqrt{2} + 2i)^2 = -2 + 4\sqrt{2}i$

0,25

$(\sqrt{2} + 2i)^2 = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} \cdot 2i + (2i)^2$

$= 2 + 4\sqrt{2}i - 4$

$= -2 + 4\sqrt{2}i$

(2) نحل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - (\sqrt{2} + 2)z + 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$ لدينا مميز المعادلة هو

0,75

$$\begin{aligned}\Delta &= [-(\sqrt{2} + 2)]^2 - 4(2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i) \\ &= 2 + 4\sqrt{2} + 4 - 8 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i \\ &= -2 + 4\sqrt{2}i \\ &= (\sqrt{2} + 2i)^2\end{aligned}$$

إذن حلي المعادلة هما : $z_1 = \frac{\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2} + 2i)}{2} = 1 - i$ و $z_2 = \frac{\sqrt{2} + 2 + (\sqrt{2} + 2i)}{2} = \sqrt{2} + 1 + 2i$

(3) لدينا العددين العقديين $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$
أ - نحدد الشكل المثلثي للعدد العقدي z_1
لدينا $|z_1| = |1 - i| = \sqrt{2}$ إذن :

0,5

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

ب - نبين أن : $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \bar{z}_2$ (\bar{z}_2 هو مرافق العدد z_2)
لدينا :

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (1 - i)(1 + \sqrt{2} + i) \\ &= 1 + \sqrt{2} + i - i - i\sqrt{2} + 1 \\ &= 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1 - i) \\ &= \sqrt{2} \bar{z}_2\end{aligned}$$

1

استنتاج : $\arg(z_1) + 2\arg(z_2) \equiv 0 [2\pi]$

لدينا $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \bar{z}_2$ إذن : $\arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \arg(\sqrt{2} \bar{z}_2) [2\pi]$ أي $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \arg(\bar{z}_2) [2\pi]$

وبما أن $\arg(\bar{z}_2) \equiv -\arg(z_2) [2\pi]$ و $\arg(\sqrt{2}) \equiv 0 [2\pi]$ فإن $\arg(z_1) + 2\arg(z_2) \equiv 0 [2\pi]$

ج - نحدد عمدة للعدد z_2

0,5

لدينا $\arg(z_1) + 2\arg(z_2) \equiv 0 [2\pi]$ و $\arg(z_1) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ إذن $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{8} [2\pi]$

مسألة :

(I) لدينا g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

(1) نبين أن $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم نستنتج منحي تغيرات الدالة g على $]0, +\infty[$.

1

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[: \quad g'(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln x \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا لكل x من $]0, +\infty[$ و $(x-1)^2 \geq 0$ و $x^2 > 0$

إذن $g'(x) \geq 0$: $\forall x \in]0, +\infty[$ وبالتالي فإن الدالة g تزايدية على المجال $]0, +\infty[$

(2) لدينا الدالة g تزايدية على المجال $]0, +\infty[$ وخصوصا على المجال $]0, 1[$ إذن

$$\forall x \in]0, 1[\Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1)$$

بما أن $g(1) = 0$ فإن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0, 1[$

0,5

لدينا الدالة g تزايدية على المجال $]1, +\infty[$ إذن $g(1) \leq g(x)$ لكل x من المجال $]1, +\infty[$

بما أن $g(1) = 0$ فإن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]1, +\infty[$

(II) الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$

(1) أ - نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ (يمكن وضع $t = \sqrt{x}$) ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,75

نضع $t = \sqrt{x}$ إذن $x = t^2$ عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \frac{(2 \ln t)^2}{t^2} = 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2$$

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = x \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right)$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب - نتحقق من أن : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$.

لكل x من $]0, +\infty[$ لدينا

0,25

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 - 2$$

$$= \frac{1}{x} + x - (-\ln x)^2 - 2$$

$$= \frac{1}{x} + x - (\ln x)^2 - 2$$

$$= f(x)$$

ج - نحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

0,5

نضع $t = \frac{1}{x}$ إذن عندما $x \rightarrow 0^+$ فإن $t \rightarrow +\infty$ و منه فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقاربا رأسي معادلته $x = 0$

د - نبين أن (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه المقارب هو المستقيم الذي معادلته هي $y = x$

0,5

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x}\right) = 1$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2\right) = -\infty$

هي $y = x$

(2) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0, +\infty[$

1,5

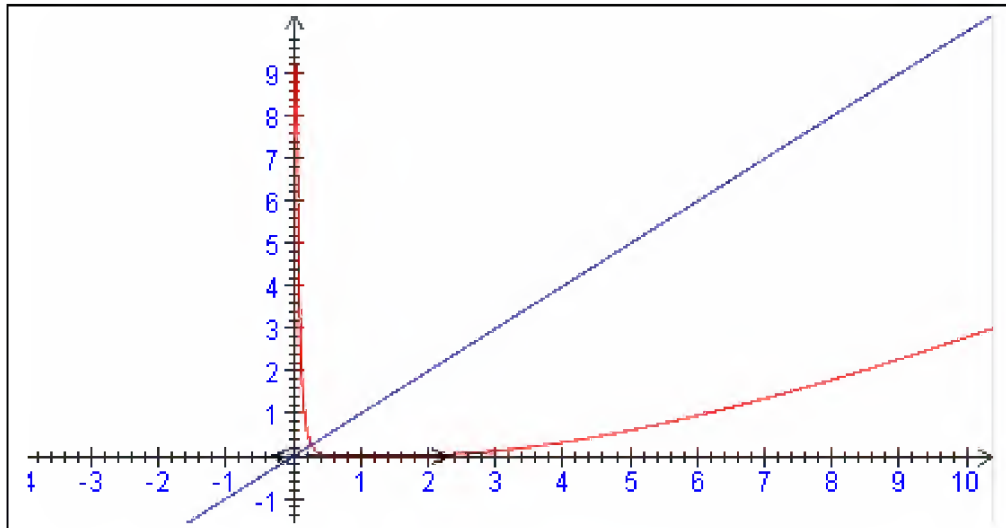
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} - 2(\ln x)(\ln x)' \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} - 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x} - 2 \ln x \right) \\ &= \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	ϕ
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) المنحنى



1

4 أ - نبين أن الدالة $G: x \ln x - x$ دالة أصلية للدالة $g: x \rightarrow \ln x$ على $]0, +\infty[$ لدينا

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[: G'(x) &= x' \ln x + x(\ln x)' - 1 \\ &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

إذن الدالة G دالة أصلية للدالة g .

ب - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، نبين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{array} \right. \quad \text{إذن} \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{array} \right. \quad \text{نضع}$$

إذن

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \frac{\ln x}{x} \cdot x dx \\ &= \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \\ &= \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - 2[x \ln x - x]_1^e \\ &= \left(e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2 \right) - 2((e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

ج - مساحة حيز المستوى المحصور (C) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x = e$ و $x = 1$ لدينا f دالة موجبة و متصلة على المجال $[1, e]$ إذن المساحة المطلوبة هي

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right) dx \\ &= \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln |x| - 2x \right]_1^e - (e - 2) \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + \ln e - 2e \right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 1 - 2 \right) - e + 2 \\ &= \frac{e^2}{2} + 1 - 2e - \frac{1}{2} + 2 - e + 2 \\ &= \frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

إذن $A = \frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2}$ بوحددة قياس المساحة