تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يوليوز 2010

تقديـــم : ذ. الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

===

التمرين الأول

1)لنبين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,2,3)$ وشعاعها هو 5.

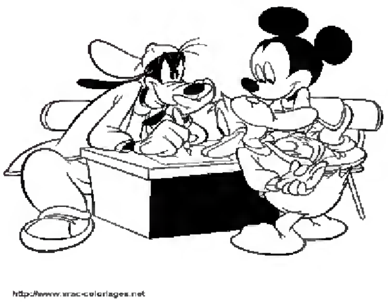
لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$$M\in(S)\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z-11=0$$

لدينا : $\Leftrightarrow (x-1)^2-1^2+(y-2)^2-2^2+(z-3)^2-3^2-11=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$$

ومنه مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,2,3)$ وشعاعها هو 5.



2) أ) نبين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,3,-4)$

و $\overrightarrow{AC}(0,3,-4)$

إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 3 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 0 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$.

استنتاج : لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ إذن A و B و C غير مستقيمية وبالتالي تحدد مستوى (ABC).

نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC).

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$$M\in(ABC)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$$

لدينا : $\Leftrightarrow 0\times(x-0)+4\times(y+2)+3\times(z-0)=0$

$$\Leftrightarrow 4y+3z+8=0$$

ومنه : $4y+3z+8=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) ب) نحسب $d(\Omega,(ABC))$:

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|4\times2+3\times3+8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{25}{5}=5$

ومنه $d(\Omega,(ABC))=5$

استنتاج : بما أن $d(\Omega,(ABC))$ يساوي شعاع الفلكة

فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

3) أ) نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) :

المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) .

إذن (Δ) موجه بمتجهة منظمية على (ABC) وهي $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

وبالتالي فإن (Δ) مار من $\Omega(1,2,3)$ وموجه بالمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

ومنه تمثيل بارامتري للمستقيم هو : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in R)$

3) ب) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

لدينا $M(x,y,z) \in (\Delta) \cap (ABC) \Leftrightarrow (\exists t \in R) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \\ 4y + 3z + 8 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 4(2+4t) + 3(3+3t) + 8 = 0$$
$$\Rightarrow 25t = -25$$
$$\Rightarrow t = -1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

ومنه : مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) هو $(1,-2,0)$.

3) ج) نتحقق من أن H هي نقطة تماس (ABC) و (S) .

لدينا H نقطة من المستوى (ABC)

بما أن مثلوث إحداثيات H يحقق معادلة الفلكة (S) فإن $H \in (S)$.

وبالتالي H نقطة مشتركة بين (ABC) و (S) .

وبما أن (ABC) مماس للفلكة (S) فإن للمستوى (ABC) و الفلكة (S) نقطة مشتركة وحيدة وهي نقطة التماس.

ومنه H هي نقطة تماس (ABC) و (S) .

التمرين الثاني

1)نحل في C المعادلة : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة .

مميز المعادلة هو $\Delta = \left(-8\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 64 = -64$

بما أن $\Delta \prec 0$ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$ و $z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$

ومنه : $S = \left\{4\sqrt{3} - 4i, 4\sqrt{3} + 4i\right\}$

2)أ) نبين أن $z' = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

لدينا $R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - 0) + 0$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) z$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

ومنه :

$$\boxed{z'=\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}$$

1)ب) نبين أن B صورة A بالدوران R .

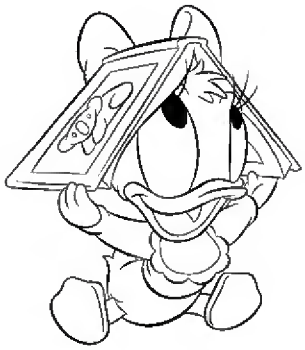
لدينا : $\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 8i=-4i+4\sqrt{3}$

إذن : $\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=b$

ومنه :

$\boxed{\text{B صورة A بالدوران R .}}$

2) ج) نبين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$:



. لدينا :

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{8i-4\sqrt{3}+4i}{8\sqrt{3}+8i-4\sqrt{3}+4i}=\frac{-4\sqrt{3}+12i}{4\sqrt{3}+12i}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3}{4}$$
$$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه :

$$\boxed{\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

. لنكتب العدد $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ على الشكل المثلثي :

لدينا :

$$\boxed{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1.\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]}$$

2)د) نستنتج أن ABC متساوي الأضلاع :

لدينا : $\frac{a-b}{c-b}=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$

إذن : $\left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

وبالتالي : $\frac{|a-b|}{|c-b|}=1$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

ومنه: $\frac{BA}{BC}=1$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

وبالتالي : $BA = BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

وهذا يعني أن

المثلث ABC متساوي الأضلاع.

التمرين الثالث

السحب يتم بالتتابع وبدون إحلال .إذن : كل نتيجة للتجربة العشوائية تعتبر ترتيبة بدون تكرار لعنصرين من بين 8.

ليكن Ω كون الإمكانيات . لدينا $card\Omega = A_8^2 = 56$

1). نسحب كرتين من بين ثلاث كرات تحمل الرقم 3 : $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{A_3^2}{56} = \frac{3\times 2}{56} = \frac{3}{28}$

. سحب كرتين إحداهما على الأقل تحمل الرقم 3 يعني سحب مع مراعاة الترتيب كرة تحمل الرقم 3 وأخرى لاتحمل الرقم 3

ومنه $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{A_2^2 + 2!A_2^1A_6^1}{56} = \frac{2+24}{56} = \frac{13}{28}$

2) أ) نسحب كرتين بالتتابع وبدون إحلال من الصندوق . عدد الكرات المسحوبة التي تحمل عددا فرديا يمكن أن يكون 0 أو 1 أو2.

ومنه قيم X هي :0 و 1 و 2.

2) ب) الحدث$(X=1)$ هو سحب كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا .

ومنه $p(X=1) = \frac{2!A_5^1A_3^1}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

2) ج) لنعط قانون احتمال X :

$$p(X=0) = \frac{A_3^2}{56} = \frac{3\times 2}{56} = \frac{3}{28}$$

$$p(X=2) = \frac{A_5^2}{56} = \frac{5\times 4}{56} = \frac{10}{28}$$

$$p(X=1) = \frac{2!A_5^1A_3^1}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

ومنه الجدول التالي :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{15}$

التمرين الرابع

1)نبين أن : $u_n \succ 0$ لكل n من N

نستعمل الإستدلال بالترجع :

من اجل n=0 لدينا $u_0 \succ 0$ لأن $u_0 = 1$.

ليكن n من N .

نفترض أن $u_n \succ 0$. لنبين ان $u_{n+1} \succ 0$.

بما أن $u_n \succ 0$ فإن $3u_n \succ 0$ و $21+u_n \succ 0$

وبالتالي $\frac{3u_n}{21+u_n} \succ 0$ أي $u_{n+1} \succ 0$

ومنه حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $u_n \succ 0$ لكل n من N .

2) نبين أن $u_{n+1} \prec \frac{1}{7}u_n$ لكل n من N .

ليكن n من N .

$$\frac{1}{7}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n - \frac{3u_n}{21+u_n}$$

لدينا : $= \frac{21u_n + u_n^2 - 21u_n}{7(21+u_n)}$

$$= \frac{u_n^2}{7(21+u_n)}$$

بما أن $u_n \succ 0$ فإن $\frac{u_n^2}{7(21+u_n)} \succ 0$ وبالتالي $\frac{1}{7}u_n - u_{n+1} \succ 0$

ومنه : $u_{n+1} \prec \frac{1}{7}u_n$ لكل n من N .

3)نبين أن (u_n) متتالية تناقصية :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{21+u_n} - u_n$$

لدينا : $= \frac{3u_n - 21u_n - u_n^2}{21+u_n}$

$$= \frac{-18u_n - u_n^2}{21+u_n} \prec 0$$

وبالتالي : $u_{n+1} - u_n \prec 0$ لكل n من N .

ومنه (u_n) تناقصية .

وبما أن (u_n) تناقصية ومصغورة بالصفر فإنها متقاربة .

4) أ) نبين بالترجع أن $u_n \prec \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من N* :

. من أجل n =1 لدينا $u_1 \prec \left(\frac{1}{7}\right)^1$ لأن $u_1 = \frac{3u_0}{21+u_0} = \frac{3}{22}$ و $\frac{3}{22} \prec \frac{1}{7}$.

. ليكن n من N* .

نفترض أن $u_n \prec \left(\frac{1}{7}\right)^n$.لنبين أن : $u_{n+1} \prec \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا $u_n \prec \left(\frac{1}{7}\right)^n$ إذن $\frac{1}{7}u_n \prec \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$ أي $\frac{1}{7}u_n \prec \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

وحيث أن $u_{n+1} \prec \frac{1}{7}u_n$ فإن $u_{n+1} \prec \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

ومنه : حسب مبدأ الترجع نستنتج أن $u_n \prec \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من N* .

4)ب) نحدد نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $0 \prec u_n \prec \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من N* .

إذن $0 \le \lim u_n \le \lim\left(\frac{1}{7}\right)^n$.

وبما أن $-1 \prec \frac{1}{7} \prec 1$ فإن $\lim\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$.

ومنه $\lim u_n = 0$ (حسب مبرهنة الدركي .... احتراماتي وتقديراتي !)

التمرين الخامس :

الجزء1:

$$\boxed{g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3}$$

1)أ)نتحقق أن : $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$ نشر ثم تبسيط ..

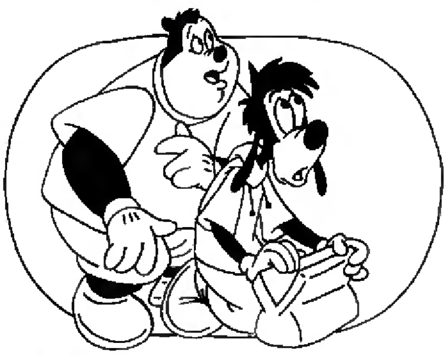
ب) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولكل x من $]0,+\infty[$ لدينا :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - 2\times\frac{1}{x}$$
$$= \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

وبما أن $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$ فإن $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

ومنه $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

2)أ) نتحقق من أن $\frac{(3x^2+3x+2)}{x} \succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.



ليكن x من $]0,+\infty[$.

إذن : $3x^2 \succ 0$ و $3x \succ 0$.

وبالتالي $3x^2 + 3x + 2 \succ 0$.

ومنه $\frac{(3x^2+3x+2)}{x} \succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

2)ب) استنتاج:

لدينا $g'(x) = (x-1)\frac{(3x^2+3x+2)}{x}$ و $\frac{(3x^2+3x+2)}{x} \succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(x-1)$ على $]0,+\infty[$.

3)أ) نبين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$.

لدينا: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$

ولدينا $g'(x) \succ 0 \Leftrightarrow x - 1 \succ 0$
$\Leftrightarrow x \succ 1$

ومنه $g'(x) \le 0$ لكل x من $]0,1]$ و $g'(x) \ge 0$ لكل x من $[1,+\infty[$.

وبالتالي فإن g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$.

3)ب) نستنتج أن $g(x) \succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ليكن x من $]0,+\infty[$ ،

. إذا كان $x \le 1$ فإن $g(1) \le g(x)$ لأن g تناقصية على المجال $]0,1]$.

. إذا كان $1 \le x$ فإن $g(1) \le g(x)$ لأن g تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

ومنه $g(1) \le g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

وحيث أن $0 \prec g(1)$ فإن $0 \prec g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني :

$$\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}}$$

1)نبين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولكل x من $]0,+\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x - 1 + \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - x^2 + 3x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

استنتاج : لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

بما أن $0 \prec x$ و $0 \prec g(x)$

فإن $0 \prec f'(x)$

ومنه f تزايدية على $]0,+\infty[$.

http://www.vrac-coloriages.net

2)أ) نبين أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x) = -\infty$:

لدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x - 1 = -1$ إذن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x - 1 + \ln(x) = -\infty$

ولدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x^2 = 0^+$ إذن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = -\infty$

ومنه : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x) = -\infty$

هندسيا: المستقيم المعرف بالمعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C).

2) ب) نبين أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{+\infty} f = +\infty$

لدينا . $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$

لدينا. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

إذن : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

2) ج) نبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى جوار $(+\infty)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}=0$

إذن : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $(+\infty)$

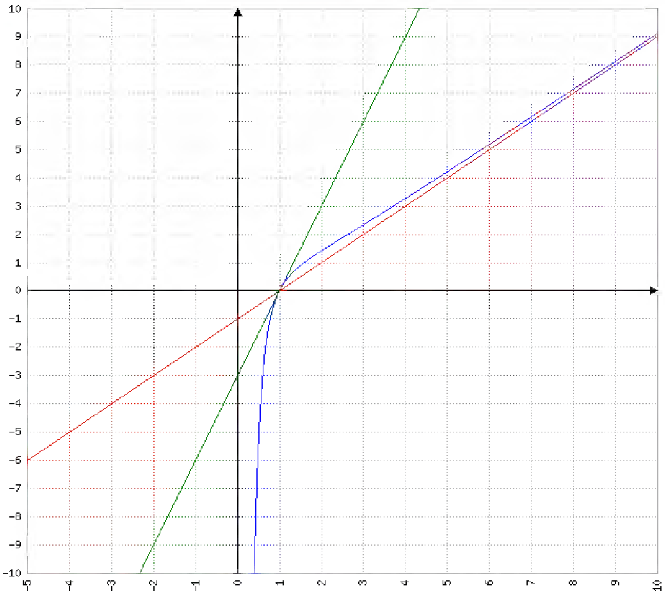
3) نبين أن $y=3(x-1)$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها هو $(1,0)$.

معادلة المستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

ولدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=3$ لأن $\ln 1=0$.

إذن $y=3(x-1)$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها هو $(1,0)$.

4)إنشاء (Δ) و (C) :



المنحنى (C) باللون الأزرق

المستقيم (Δ) باللون الأحمر.

مماس (C) في النقطة ذات الأفصول 1 باللون الأخضر

5) أ) نبين أن $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$:

نضع : $\begin{cases} v(x)=\ln x \\ u'(x)=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} v'(x)=\dfrac{1}{x} \\ u(x)=\dfrac{-1}{x} \end{cases}$

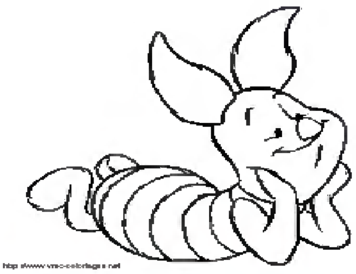
وبالتالي :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e -\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

ومنه : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$



5) ب) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي :

$\displaystyle\int_1^e |f(x)-(x-1)|dx\times ua$ حيث ua هي وحدة قياس المساحة أي $ua=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=1^2\ cm^2=1cm^2$.

ولدينا : $\displaystyle\int_1^e |f(x)-(x-1)|dx=\int_1^e \left|x-1+\frac{\ln x}{x^2}\right|dx$

وحيث أن x عنصر من $[1,e]$ فإن $x-1\geq 0$ و $\ln x\geq 0$ أي أن $x-1+\dfrac{\ln x}{x}\geq 0$ (مجموع عددين موجبين)

وبالتالي :

$$\int_1^e |f(x)-(x-1)|dx = \int_1^e x-1+\frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}dx + \int_1^e \frac{-1}{x^2}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$= [\ln x]_1^e + [1/x]_1^e + 1 - \frac{2}{e}$$

$$= (\ln e - \ln 1) + \left(\frac{1}{e} - 1\right) + 1 - \frac{2}{e}$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

ومنه مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\left(1-\frac{1}{e}\right)\ cm^2$.

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

wadiiifi@hotmail.com