الثانية بكالوريا علوم فيزيائية الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراكية **2011**	الأستاذ : عبد العزيز حمداوي الثانوية التأهيلية عبد الكريم الخطابي أكـــادير

التمرين الأول :

1) أ) **لنحل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $x^2-2x-3=0$:

لدينا $x^2-2x-3=0$

لنحسب المميز Δ لهذه المعادلة : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$

بما أن $\Delta>0$ فإن للمعادلة حلان حقيقيان هما : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$ و $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $x^2-2x-3=0$ هي $\boxed{S=\{-1;3\}}$

ب) **لنحل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$:

ليكن x عددا حقيقيا و S مجموعة حلول المعادلة $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$

$$\begin{aligned} x\in S &\Leftrightarrow e^x-\frac{3}{e^x}-2=0\\ &\Leftrightarrow \frac{(e^x)^2-3-2e^x}{e^x}=0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2-3-2e^x=0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x-3=0 \end{aligned}$$

نضع $t=e^x$ فنحصل على المعادلة $t^2-2t-3=0$ و التي حلاها هما 1- و 3 حسب السؤال أعلاه .

إذن $e^x=3$ أو $e^x=-1$.

و بما أن $e^x>0$ مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن $e^x=3$ أي $x=\ln 3$ و بالتالي فإن حل المعادلة $e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$ هو $\ln 3$

و منه $\boxed{S=\{\ln 3\}}$

2) **لنحل في** $\mathbb{R}$ **المتراجحة :** $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$:

ليكن x من $\mathbb{R}$ ، هذه المتراجحة تكافئ : $e^{x+1}\geq e^{-x}$

و لأن الدالة $x\mapsto e^x$ دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $e^{x+1}\geq e^{-x}$ تكافئ $x+1\geq -x$

يكافئ $x+1+x\geq 0$

أي $2x+1\geq 0$

يعني أن $2x\geq -1$

ومنه فإن $x\geq\dfrac{-1}{2}$

و بالتالي فإن $\boxed{S=\left[\dfrac{-1}{2};+\infty\right[}$

التمرين الثاني :

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $z^2-6z+18=0$

لتكن S مجموعة حلول هذه المعادلة .

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times18=36-72=-36$

Hamdaoui73@hotmail.com

بما أن $\Delta < 0$ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i$ و $z_2 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$

و بالتالي فإن : $\boxed{S = \{3-3i ; 3+3i\}}$

2) أ) لنكتب على الشكل المثلثي كل من العددين a و b :

لدينا : $a = 3+3i$ إذن $|a| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ و منه :

$$a = 3+3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$$

و منه فإن $\boxed{a = \left[3\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}$

و لدينا : $b = 3-3i$ إذن $|b| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ و منه :

$$b = 3-3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

و بالتالي فإن $\boxed{b = \left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}$

ب) لنبين أن لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6 :

نعلم أن التمثيل العقدي للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هو : $z' = z + z_{\vec{u}}$

و لدينا B' صورة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ ، و ليكن b' لحق النقطة B' ، إذن سيكون لدينا : $b' = b + a$ (باعتبار أن a هو لحق المتجهة $\overrightarrow{OA}$ لأن : $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A - z_O = a - 0 = a$)

إذن سنحصل على : $b' = 3-3i+3+3i$ أي : $b' = 6$

و منه فإن b' لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6 .

ج) لنبين أن $\frac{b-b'}{a-b'} = i$ ثم نستنتج أن النثلث $AB'B$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في B'

$$\frac{b-b'}{a-b'} = \frac{3-3i-6}{3+3i-6} = \frac{-3-3i}{-3+3i} = \frac{-3(1+i)}{-3(1-i)} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

إذن : $\boxed{\frac{b-b'}{a-b'} = i}$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{B'B}}}{z_{\overrightarrow{B'A}}}\right) = \arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$ (لأن $\frac{b-b'}{a-b'} = i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \left[1;\frac{\pi}{2}\right]$)

إذن المثلث $AB'B$ قائم الزاوية في B' .

من جهة أخرى ، $\frac{b-b'}{a-b'} = i$ يعني أن $\left|\frac{b-b'}{a-b'}\right| = 1$ و منه فإن : $\frac{|b-b'|}{|a-b'|} = 1$

أي $|b-b'| = |a-b'|$ و بالتالي فإن $B'B = B'A$. إذن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين .

من كل هذا نستنتج أن المثلث $AB'B$ متساوي الساقين و قائم الزاوية في B' .

د) لنستنتج أن الرباعي $OAB'B$ مربع :

لدينا النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ ، إذن $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B'B}$ و منه الرباعي $OAB'B$ متوازي أضلاع ،

Hamdaoui73@hotmail.com

من جهة أخرى $OAB'B$ له زاويق قائمة و ضلعان متتابعان متقايسان ، إذن الرباعي $OAB'B$ مربع .

التمرين الثالث :

لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) أ) لنتحقق من أن : $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$:

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n}$

إذن :

$$u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6u_n}{1+15u_n}-\frac{1}{3}=\frac{3\times 6u_n}{3\times(1+15u_n)}-\frac{1+15u_n}{3\times(1+15u_n)}=\frac{18u_n-1-15u_n}{3\times(1+15u_n)}=\frac{3u_n-1}{3\times(1+15u_n)}$$

$$=\frac{3\left(u_n-\dfrac{1}{3}\right)}{3\times(1+15u_n)}$$

$$=\frac{u_n-\dfrac{1}{3}}{1+15u_n}$$

و منه فإن $\boxed{u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) لنبين بالترجع أن : $u_n>\dfrac{1}{3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:**

لدينا $u_0=1$ إذن $u_0>\dfrac{1}{3}$ أي أن العلاقة صحيحة من أجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نفترض أن $u_n>\dfrac{1}{3}$ و نبين أن $u_{n+1}>\dfrac{1}{3}$

لدينا : $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، و بما أن $u_n>\dfrac{1}{3}$ فإن : $u_n-\dfrac{1}{3}>0$ و كذلك $15u_n+1>0$

و بالتالي فإن $\dfrac{u_n-\dfrac{1}{3}}{15u_n+1}>0$ و هذا يعني حتما أن : $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}>0$ أي : $u_{n+1}>\dfrac{1}{3}$

إذن حسب مبدأ الترجع نستنتج أن $u_n>\dfrac{1}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) لنبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{6}$ ثم لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ إذن :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3 \times \left(\frac{6u_n}{1+15u_n}\right)} = 1 - \frac{1}{\frac{18u_n}{1+15u_n}} = 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n} = \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{18u_n}$$

و منه فإن : $v_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{3u_n}{18u_n} - \frac{1}{18u_n} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18u_n} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3u_n}\right)$

و بالتالي فإن : $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n}$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = v_0 \times q^n$ حيث v_0 حدها الأول و q أساسها (صيغة الحد العام لمتتالية هندسية)

حساب v_0 : $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

و منه فتعبير v_n بدلالة n هو كالتالي : $\boxed{v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

3) لنبين أن $u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ **لكل n من $\mathbb{N}$ ثم نستنتج** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ ، إذن : $\frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$ أي : $3u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

إذن : $u_n = \frac{1}{3(1 - v_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن $u_n = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أي $\boxed{u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

بما أن $-1 < \frac{1}{6} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ و بالتالي فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{3}$ و منه فإن : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}}$

التمرين الرابع :

I. لدينا g دالة عددية معرفة على $I =]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1) أ) **لنبين أن** $g'(x) = \frac{x+1}{x}$ **لكل** x من I .

لدينا $g(x) = x - 1 + \ln x$ لكل x من I ،

الدالة g دالة قابلة للاشتقاق على المجال I لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I ،

و لكل x من I لدينا : $g'(x) = (x - 1 + \ln x)'$

أي لكل x من I $\quad g'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

إذن لكل x من I $\quad \boxed{g'(x)=\frac{x+1}{x}}$

ب) لنبين أن الدالة g تزايدية على I :

بما أن $x\in]0;+\infty[$ فإن $x>0$ و $x+1>0$ و بالتالي $\frac{x+1}{x}>0$

إذن لكل x من I $\quad g'(x)>0$ و هذا يعني أن الدالة g تزايدية على I .

2) لنستنتج إشارة $g(x)$ على I .

لدينا لكل x من I $\quad g'(x)>0$ إذن جدول تغيرات الدالة g هو كالتالي :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1+\ln x)=0-1+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}(x-1+\ln x)=+\infty-1+(+\infty)=+\infty$$

$$g(1)=1-1+\ln 1=0$$

من خلال جدول تغيرات الدالة g يتضح أن $g(x)\geq 0$ على $[1;+\infty[$ و أن $g(x)\leq 0$ على $]0;1]$

(يمكن الوصول إلى نفس الاستنتاج اعتمادا على رتابة الدالة g)

II.

1) **أ) لنبين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و نأول هندسيا النتيجة :**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=(-1)\times(-\infty)$$

إذن : $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

التأويل الهندسي : من خلال النتيجة أعلاه نستنتج أن منحنى الدالة f يقبل محور الأراتيب مقاربا رأسيا .

ب) لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$:

لدينا : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=1\times(+\infty)=+\infty$

ومنه فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

و لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=1\times0=0$

إذن $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$ (لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$)

ج) الاستنتاج : بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ في اتجاه محور الأفاصيل .

2) أ) لنبين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من I :

f دالة قابلة للاشتقاق على I ، و لكل x من I لدينا :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)'=\left(\frac{x-1}{x}\right)'\times\ln x+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times(\ln x)'\\&=\frac{(x-1)'\times x-(x-1)\times x'}{x^2}\times\ln x+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\\&=\frac{x-x+1}{x^2}\times\ln x+\frac{x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{\ln x+x-1}{x^2}\end{aligned}$$

إذن لكل x من I $\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}}$

ب) استنتاج رتابة الدالة f

نعلم أن $g(x)\geq0$ على $[1;+\infty[$ و أن $g(x)\leq0$ على $]0;1]$ ، إذن $f'(x)\geq0$ على $[1;+\infty[$ و $f'(x)\leq0$ على $]0;1]$

و بالتالي فإن الدالة f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ وتناقصية على المجال $]0;1]$.

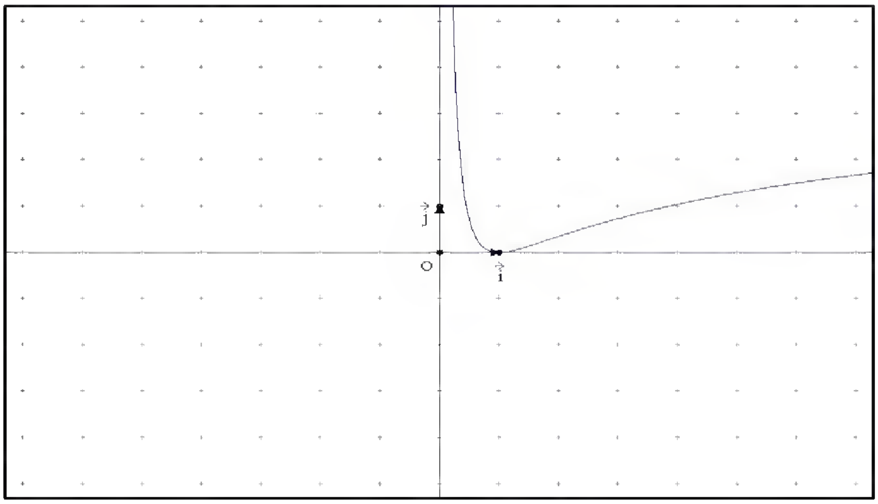
ج) جدول تغيرات الدالة f على I :

من خلال ما سبق فإن جدول تغيرات الدالة f على I هو كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) إنشاء المنحنى (C)

Hamdaoui73@hotmail.com



3) أ) لنبين أن $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ **دالة أصلية للدالة** $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ **على المجال** I

الدالة H قابلة للاشتقاق على I و لكل x من I لدينا : $H'(x) = \left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)' = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$

و منه فإن لكل x من I : $H'(x) = \frac{\ln x}{x}$ و هذا يعني أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h على I .

ب) لدينا $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال I و 1 و e عنصرين من I

إذن $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \left(\frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right) = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$

و منه $\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}}$

ج) المكاملة بالأجزاء

لحساب التكامل $\int_1^e \ln x \, dx$ نستعمل تقمية المكاملة بالأجزاء حيث نضع :

$u(x) = \ln x$ و $v'(x) = 1$ إذن $u'(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = x$

و منه

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e$$

و بالتالي فإن $\int_1^e \ln x \, dx = (e \ln e - 1 \ln 1) - (e - 1) = e - 0 - e + 1 = 1$

إذن $\boxed{\int_1^e \ln x \, dx = 1}$

4) أ) لنتحقق أن $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$ **لكل** x **من** I **:**

لكل x من I لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \frac{x \ln x - \ln x}{x} = \frac{x \ln x}{x} - \frac{\ln x}{x}$

إذن لكل x من I $\boxed{f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}}$

ب) ليكن Δ حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ إذن مساحة هذا الحيز هي : $A(\Delta)=\int_1^e |f(x)|dx\times ua$

و لأن $f(x)\geq 0$ لكل x من I (أنظر جدول التغيرات و كذا المنحنى أعلاه) فإن $A(\Delta)=\int_1^e f(x)dx\times ua$

$$A(\Delta)=\int_1^e f(x)dx\times ua=\int_1^e\left(\ln x-\frac{\ln x}{x}\right)dx\times ua$$

و منه فإن

$$A(\Delta)=\int_1^e \ln x dx\times ua-\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx\times ua=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times ua=\frac{1}{2}\times 1cm^2$$

و بالتالي $\boxed{A(\Delta)=0,5\ cm^2}$