بسم الله الرحمن الرحيم

(1) نبين أن $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة (S)

لدينا $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2+2y+z^2-1=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(y+\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)+(z-0)^2-1=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2-3=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=3$

وبالتالي $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ هي معادلة للفلكة (S)

نتحقق أن $A\in(S)$

نعوض إحداثيات A في المعادلة الديكارتية للفلكة (S)

$(0-1)^2+(0+1)^2+(1-0)^2=1+1+1=3$

بما أن إحداثيات النقطة A تحقق المعادلة الديكارتية للفلكة (S) إذن $A\in(S)$

(2)(أ) نبين أن $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AB}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AC}\begin{pmatrix}2-0\\1-0\\2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$=(1\times1-0\times1)\vec{i}-(1\times1-0\times2)\vec{j}+(1\times1-1\times2)\vec{k}$

$=1\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$

$=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

استنتاج أن $x-y-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\neq 0$ و هي منظمية على كلا من المتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ إذن هي منظمية على المستوى (ABC)

إذن معادلة (ABC) الديكارتية تكتب على الشكل

$x-y-z+d=0$

لتحديد d نعوض إحداثيات إحدى النقط A أو B أو C في هذه المعادلة

$0-0-1+d=0$

$\Rightarrow d=1$

إذن $x-y-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

(ب) نحسب $d(\Omega,(ABC))$

$d(\Omega,(ABC))=\frac{|(1)-(-1)-(0)+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

إذن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}=R$ وبما أن النقطة $A\in(ABC)$ و $A\in(S)$

فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة A

(3)(أ) لدينا $\Delta\perp(ABC)$ إذن المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}(1,-1,-1)$ هي موجهة له

وبما أن Δ مار من Ω فالتمثيل البارامتري لـ Δ هو

$$\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

(ب) استنتاج مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع (Δ) و (S)

لدينا $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=3$ هي المعادلة الديكارتية للفلكة (S) و

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

هو التمثيل البارامتري للمستقيم Δ

نعوض هذا التمثيل البارامتري في المعادلة الديكارتية لـ (S) وذلك لتحديد t

$$(1+t-1)^2+(-1-t+1)^2+(-t)^2=3$$

$$t^2+t^2+t^2=3 \Rightarrow 3t^2=3$$

$$\Rightarrow t^2=1$$

يعني أن $t=1$ أو $t=-1$

إذن مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع (Δ) مع الفلكة (S) هو كالتالي

$$\begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1+(-1) \\ -1-(-1) \\ -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

التمرين الثاني (الأعداد العقدية)

① نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-8z+25=0$

نحسب أولا المميز Δ

$$\Delta = (-8)^2-4(1)(25) = 64-100 = -36$$

لدينا $\Delta=-36<0$ إذن للمعادلة حلان عقديان مختلفان

$$z_1 = \frac{8+i\sqrt{36}}{2} = \frac{8+6i}{2} = 4+3i$$

$$z_2 = \frac{8-i\sqrt{36}}{2} = \frac{8-6i}{2} = 4-3i$$

إذن حلي المعادلة $z^2-8z+25=0$ هما $4+3i$ و $4-3i$

② (أ) نبين أن لحق النقطة D صورة A بالإزاحة T هو $d=10+9i$

لدينا $\vec{BC}$ هي متجهة الإزاحة و D صورة A بهذه الإزاحة إذن هذه العبارة تحقق المتساوية التالية

$$\vec{BC} = \vec{AD} \Longrightarrow c-b = d-a$$

$$\Rightarrow d = c-b+a$$

$$= 10+3i-\cancel{4}+3i+\cancel{4}+3i$$

$$= 10+9i$$

(ب) نتحقق من أن $\frac{b-a}{d-a} = -\frac{1}{2}(1+i)$

$$\frac{b-a}{d-a} = \frac{\cancel{4}-3i-\cancel{4}-3i}{10+9i-4-3i} = \frac{-6i}{6+6i}$$

$$= \frac{-6i(6-6i)}{(6+6i)(6-6i)} = \frac{-36i-36}{36+36}$$

$$= \frac{-36i-36}{72} = \frac{(-i-1)36}{2\times 36} = \frac{-1-i}{2}$$

$$\frac{b-a}{d-a} = -\frac{1}{2}(1+i)$$

كتابة $-\frac{1}{2}(1+i)$ على الشكل المثلثي

$$\left|-\frac{1}{2}(1+i)\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| \times |1+i|$$

$$= \frac{1}{2}\times\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{2}(1+i)\right) = \operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arg}(1+i)$$

$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi$ لأن $-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}^-$

لكن θ هو عمدة العدد العقدي $(1+i)$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$Arg\left(-\frac{1}{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

وبالتالي الشكل المثلثي للعدد $-\frac{1}{2}(1+i)$ هو

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

ج) نبين أن $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}\right) = Arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)$$

وحسب السؤال السابق $Arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = \frac{5\pi}{4}$

وبالتالي $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

التمرين الثالث (المتتاليات العددية)

1) $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1$

$= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - \frac{5}{5} = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5}(u_n - 1)$

2) (أ) ← من أجل $n=0$ لدينا: $U_0 = 2 > 1$

عبارة صحيحة من أجل $n=0$

← نفترض أن $U_n > 1$ ونبرهن أن $U_{n+1} > 1$

لدينا $U_n > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}U_n > \frac{1}{5}$

$\Leftarrow \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$

$\Leftarrow \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > 1$

$\Leftarrow u_{n+1} > 1$

إذن حسب البرهان بالترجع $U_n > 1$

ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - U_n$

$= U_n\left(\frac{1}{5} - 1\right) + \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}U_n + \frac{4}{5}$

$= -\frac{4}{5}(U_n - 1)$

لدينا $U_n > 1 \Leftarrow U_n - 1 > 0$

وبالتالي $-\frac{4}{5}(U_n - 1) < 0$ إذن U_n متتالية تناقصية

ج) بما أن U_n متتالية تناقصية حسب السؤال السابق

و U_n محصورة ب 1 حسب السؤال (أ)

إذن هي متقاربة

3) (أ) $V_n = U_n - 1$

$\Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(U_n - 1)$

$V_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n - 1)$

إذن $V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n$

وبالتالي V_n هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

$V_n = q^{n-p}V_p = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times V_0$

$V_0 = U_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

إذن $V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

ب) لدينا $V_n = U_n - 1$

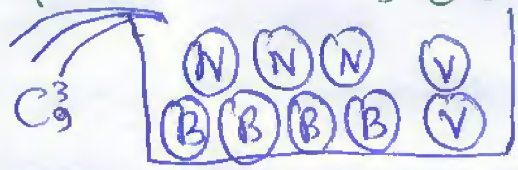
$\Rightarrow V_n + 1 = U_n$

$V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

$\lim U_n = \lim \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

(لأن $\lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{5} < 1$)

التمرين الرابع (حساب الاحتمال)



① $P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{4+1}{84}$

$P(A) = \frac{5}{84}$

$P(B) = \frac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_9^3} = \frac{4\times3\times2}{84}$

$P(B) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

② لدينا 3 بيدقات سوداء أو 0

السحبات الممكنة

NNN أو $N\bar{N}\bar{N}$ أو $NN\bar{N}$ أو $\bar{N}\bar{N}\bar{N}$

$x=3 \quad x=2 \quad x=1 \quad x=0$

ب) $P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{C_9^3} = \frac{3\times 15}{84} = \frac{45}{84}$

$P(X=1) = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$

$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{3\times 6}{84} = \frac{18}{84}$

$P(X=2) = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

ج) قانون احتمال X

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$	1

$P(X=0) = \frac{C_6^3}{84} =$ $\quad$ $P(X=3) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$

التمرين الخامس (الدوال)

① أ) $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1$

$= 2x^2 - x - 1$

ب) $g'(x) = \left(\cancel{x^2 - x} - \ln(x)\right)'$

$= (x^2)' - (x)' - (\ln(x))'$

$= 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2x^2-x-1$

لأن ($\forall x \in]0,+\infty[- x>0$)

إشارة $2x^2-x-1$ هي إشارة $x-1$

لأن $2x^2-x-1 = (2x+1)(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

من خلال جدول إشارة $g'(x)$ لدينا

$g(x)$ تناقصية على $]0,1]$ وتزايدية على $[1,+\infty[$

② نضع جدول تغيرات g

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

بما أن 0 قيمة دنيا للدالة g

إذن $g(x) \geq 0$

II ① أ) $f(x) = x^2 - 1 - (\ln(x))^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 - 1 - (\ln(x))^2 = -\infty$

($\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln^2(x) = -\infty$ لأن)

إذا $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ إذن C_f يقبل كمقارب بجوار $-\infty$

(ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2-1-(\ln(x))^2$

$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-\ln^2(x)}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{x} - \frac{\ln^2(x)}{x} = +\infty$

$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 = 0\right)$ لأن

(ج) إذا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ فإن C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

(2) (أ) $f'(x) = \left(x^2-1-(\ln(x))^2\right)'$

$= 2x - 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) = 2x - 2\frac{\ln(x)}{x}$

$= 2\left(x-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$

(ب) $\frac{g(x)}{x}+1 = \frac{x^2-x-\ln(x)}{x}+1$

$= \frac{x^2-x-\ln(x)+x}{x} = \frac{x^2-\ln(x)}{x}$

لدينا $g(x)\geq 0$ وذلك حسب السؤال 2 من الجزء I و $x>0$ وذلك $\forall x\in]0,+\infty[$

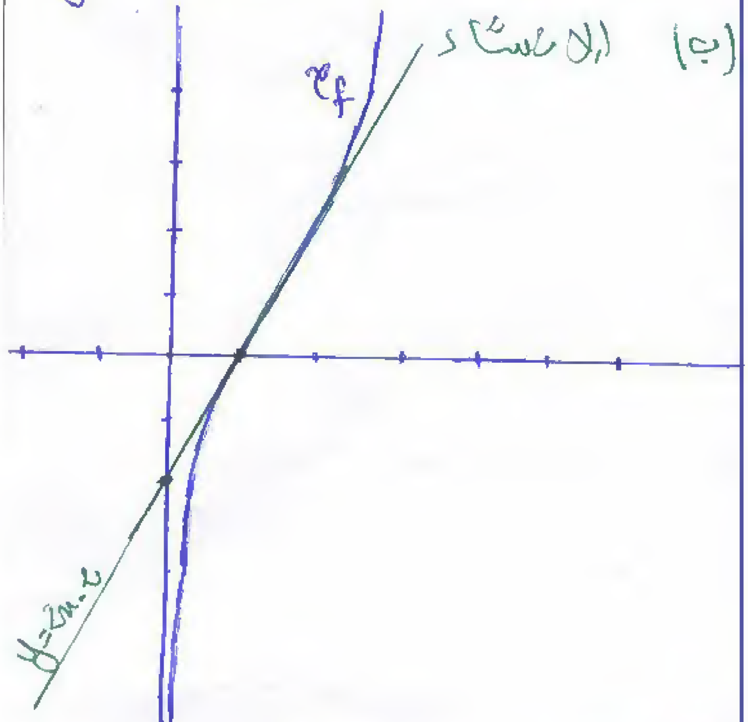
ومنه $f'(x)$ تزايدية على $]0,+\infty[$

(3) (أ) معادلة المماس عند النقطة $A(1,0)$

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$y = 2(x-1)+0 = 2x-2$

(ب) الإنشاء



(4) (أ) $\left(x(\ln(x)-1)\right)' = (x)'(\ln(x)-1) + x(\ln(x)-1)'$

$= \ln(x)-1 + x\times\frac{1}{x}$

$= \ln(x)-1+1 = \ln(x)$

وبالتالي $x(\ln(x)-1)$ دالة أصلية لـ $\ln(x)$

$\int_1^e \ln(x)\,dx = \left[x(\ln(x)-1)\right]_1^e$

$= e(\ln(e)-1) - 1(\ln(1)-1)$

$= e\times 0 - 1\times -1 = 1$

(ب) نضع $U(x)=\ln(x) \Leftarrow U'(x)=\frac{1}{x}$

و $V'(x)=\ln(x)$ $V(x)=x(\ln(x)-1)$

$$\int_1^e (\ln(x))^2 dx$$

$$= \left[\ln(x) \times x(\ln(x)-1)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x(\ln(x)-1) dx$$

$$= \left[x\ln^2(x) - x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \ln(x) - 1 \, dx$$

$$= \left[x\ln^2(x) - x\ln(x)\right]_1^e - \left(\int_1^e \ln(x) dx - \int_1^e 1 \, dx\right)$$

$$= e - e - 0 - \left(1 - [x]_1^e\right)$$

$$= 0 - (1 - (e - 1))$$

$$= -(1 - e + 1) = e - 2$$

ج) مساحة الحيز المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $x=1$ و $x=e$ ومحور الأفاصيل

هي

$$\int_1^e |f(x)| \, dx = \int_1^e f(x) \, dx \; cm^2$$

($\mathcal{C}_f$ فوق محور الأفاصيل في المجال $[1,e]$)

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e x^2 - 1 - \ln^2(x) \, dx \; cm^2$$

$$= \int_1^e x^2 dx - \int_1^e 1 \, dx - \int_1^e \ln^2(x) dx \; cm^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e - [x]_1^e - e + 2 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} - (e-1) - e + 2 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} - e + 1 - e + 2 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - 2e - \frac{1}{3} + 3 \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - 2e \frac{-1+9}{3} \; cm^2$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - 2e + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^3 - 6e + 8\right) \; cm^2$$

تم التصحيح بواسطة
القاضي عبد الحميد

للتواصل OULKADIWEB@GMAIL.COM
WWW.FB.COM/OAH208

الهاتف +212 6 03 67 30 01