SIMILI BACCALAUREAT **Durée : 4 heures**
Session de février 2018 **Coefficient : 5**

MATHEMATIQUES

SERIE : C

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3
Le candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 (4 Points)

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution.
2. Vérifier que (13 ; 3) est solution de l'équation (E).
3. Résoudre l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a est un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation : $25g - 108c = 1$

On appelle petit théorème de Fermat la propriété suivante :
« si p est un nombre premier et a est un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ »

1. Soit x un entier naturel. Démontrer que, si $x \equiv a[7]$ et $x \equiv a[19]$ alors $x \equiv a[133]$.
2. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   a) Démontrer que $a^6 \equiv 1[7]$ puis que $a^{108} \equiv 1[7]$.
   b) En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.
3. On suppose que a est un multiple de 7, démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.
4. On admet que pour tout entier naturel a , $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[19]$. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[133]$

EXERCICE 2 (5 Points)

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $i, -2i, \frac{1}{2}i$ et $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Partie A

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$, (E) : $2z^3 - \left(3\sqrt{3} - 3i\right)z^2 + \left(3 - 3\sqrt{3}i\right)z - 6\sqrt{3} + 2i = 0$

1. Montrer que (E) admet deux solutions imaginaires pures notées z_1 et z_2 avec $|z_1| < |z_2|$.
2. Résoudre alors l'équation (E). Soit z_3 la troisième solution.
3. a) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$.

   b) En déduire la nature du triangle de sommets les points images des solutions de (E).

Partie B

Soit l'application f de $\mathcal{P}\backslash\{A\}$ dans $\mathcal{P}\backslash\{B\}$; qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que :
$z' = \dfrac{2z-i}{iz+1}$.

1. Montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1} .
2. Montrer que $(z'+2i)(z-i)=1$.
3. On note $z-i=re^{i\theta}$. Déterminer la forme exponentielle de $z'+2i$.
4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1. Montrer que si $M \in \mathcal{C}$ alors M' appartient à un cercle $\mathcal{C}'$ que l'on précisera.
5. Soit le point T d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$. Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$ et en déduire que $T \in \mathcal{C}$.

   a) Déterminer $mes\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{AT}}\right)$ puis $mes\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BT'}}\right)$.

   b) En déduire une construction de l'image T' de T par f.

PROBLEME (11 Points)

Le but du problème est l'étude d'une fonction g_k où k est un réel fixé qui vérifie :

$$g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}, \text{ avec } 0 < k < e.$$

Dans la partie **A** on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie **B**.

Partie A

Soit f_k la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (2-x)e^x - k$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f_k'(x)$. En déduire le tableau de variation de f_k.

Calculer f_k (1).

3. a) Établir que l'équation $f_k(x) = 0$ a deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle $]-\infty; 1[$ et une autre notée β_k appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

b) Montrer que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.

On admettra que : $e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$.

4. Préciser le signe de $f_k(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - kx$.

a) Étudier le sens de variation de u puis dresser son tableau de variation (on ne calculera pas les limites de u).

b) On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante : pour tout réel x, $e^x - kx > 0$.

2. Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_k(x) = \dfrac{e^x - k}{e^x - kx}$.

On note (C_k) la courbe représentative de la fonction g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a) Déterminer les limites de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_k(x) = \dfrac{k.f_k(x)}{(e^x - kx)^2}$.

c) En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$.

3. On nomme M_k et N_k les points de la courbe (C_k) d'abscisses respectives α_k et β_k.

a) En utilisant la question **3.**b) (Partie **A**), montrer que : $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.

b) Déterminer de même $g_k(\beta_k)$.

c) Déduire de la question précédente que, lorsque k varie, les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont on donnera une équation.

4. Représentations graphiques pour des valeurs particulières de k.

a) Déterminer la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.

c) En prenant comme unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes (C_1), (C_2) et (H) sur le même graphique.

On prendra $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 1,6$.