SIMILI BACCALAUREAT

Session de février 2017

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

MATHEMATIQUES

SERIE : C

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/3, 2/3 et 2/3.

Le candidat recevra 2 FEUILLES de papier millimétré.

Toute calculatrice NON GRAPHIQUE est autorisée.

EXERCICE 1

OBCD est un rectangle direct tel que OB = 2OD. I et J sont les milieux respectifs de [OB] et [DC]. Le triangle IAB est rectangle isocèle direct en I.(*on fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure*) . soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Démontrer que la rotation R transforme A en B et C en D.
   b) En déduire que AC= BD et (AC)⊥(BD).
   c) Soit K le point d'intersection de (AC) et (BD). Démontrer que les points A, I , K et B sont Cocycliques .
2. Soit F le symétrique de B par rapport à O. Soit $f = S_{(OD)} \circ R$.
   a) Justifier que f est une symétrie glissée.
   b) Déterminer $f(A)$ et $f(C)$.
   c) Soit E le milieu du segment $[AF]$, montrer que $(OE) \parallel (AB)$ en déduire que : $J \in (OE)$.
   d) Justifier que la droite (OE) est l'axe de f?
   e) Démontrer que $f \circ S_{(OE)} = S_{(OE)} \circ f$ est une translation de vecteur noté $\vec{u}$.
   f) Démontrer que $S_{(OE)} \circ f(C) = I$ en déduire le vecteur $\vec{u}$.

EXERCICE 2

Partie A

1. Soit z un nombre complexe, dont la partie imaginaire est nulle (Im(z) = 0) et la partie réelle est strictement positive (Re(z) > 0). Préciser l'argument principal de z.
2. Soit α et β deux nombres réels. On note z_1 et z_2 les nombres complexes définis par

$$z_1 = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \text{ et } z_2 = e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta .$$

   a) Justifier l'existence du nombre complexe $Z = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$.
   b) Exprimer Z en fonction de cos ($\alpha - \beta$).
   c) Montrer que $Z = 4\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.
   d) En déduire le module et l'argument principal de Z.
   e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que Z soit nul.

Partie B

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit a et b deux nombres complexes non nuls. On note α et β les arguments de a et b, et on note A et B les points d'affixes a et b.

I. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les points O, A et B ne soient pas alignés.

II. On considère dans la suite que les points O, A et B ne sont pas alignés. On appelle G le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients $|b|$, module de b et de $|a|$, module de a.

On note $G = \text{Bar}\ \{(A, |b|)\ ;\ (B, |a|)\}$, et z l'affixe du point G.

1. a) Justifier l'existence de G.

b) Exprimer z en fonction de a de b et de leurs modules.

2. a) Déterminer, en fonction de $|a|$ et de $|b|$, le nombre réel H tel que $z = H(e^{i\alpha} + e^{i\beta})$

b) Déterminer, en fonction de $|a|$ et de $|b|$, le nombre réel K tel que : $\dfrac{z^2}{ab} = K\dfrac{(e^{i\alpha} + e^{i\beta})^2}{e^{i\alpha}.e^{i\beta}}$.

Justifier que K est strictement positif.

c) En utilisant la partie **A**, justifier que $\dfrac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif, préciser son argument principal.

d) En déduire une relation entre l'argument principal de z et les nombres α et β.

3. a) Exprimer alors l'angle $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OG}})$ en fonction des angles $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})$ et $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}})$.

b) En déduire la valeur de $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG}})$ en fonction de $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

c) La droite (OG) par rapport à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ par : $f(x) = ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| - \dfrac{1}{x+1}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. a) Dresser le tableau des variations de la fonction f

   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $-0{,}3 \leq \alpha \leq -0{,}2$. En déduire le signe de $f(x)$.

Partie B

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$g(x) = x\,ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$ *si* $x \neq 0$ *et* $g(0) = 0$ et (C) sa représentation graphique dans le repère orthonormal (O, I, J) *unité 2cm.*

1. a) Etudier la continuité de g en 0.

   b) Etudier la dérivabilité de g en 0. En donner l'interprétation graphique.

   c) Etudier les limites de g en $-\infty$, -1 *et* $+\infty$. En déduire que la représentation graphique de g admet des asymptotes que l'on précisera.

   d) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la **Partie A** le sens de variation de g.

   e) Vérifier que $g(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$.

   f) Dresser le tableau des variations de g .

   g) Justifier que la représentation graphique de g a exactement deux points de contact avec l'axe des abscisses, que l'on précisera.

   h) Tracer la courbe (C). *On prendra* $\alpha = -0{,}2$.

Partie C

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que l'équation $x \in [0;+\infty[$, $g(x) = 1 - \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique u_n .

2. On considère la suite numérique (u_n) obtenue avec les solutions de l'équation ci-dessus.

a) Etudier le sens de variation de (u_n) .

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? justifier votre réponse.