SIMILI BACCALAUREAT
Session de février 2018

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

MATHEMATIQUES

SERIE : D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3,2/3 et 3/3.
Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1(4 points)

On dispose de deux sacs A et B contenant des boules indiscernables au toucher.
Le sac A contient : 3 boules oranges, 3 boules blanches et 2 boules vertes.
Le sac B contient : 2 boules oranges et 2 boules vertes

1. On extrait simultanément 3 boules du sac A et on observe leurs couleurs.
   Calculer la probabilité de l'événement : « Les 3 boules tirées ont la même couleur »
2. On extrait successivement avec remise 3 boules du sac B et on observe leurs couleurs.
   Démontrer la probabilité de l'événement : « Les 3 boules tirées ont la même couleur » est $\frac{1}{4}$
3. On organise le jeu suivant :
   Le joueur mise une somme m.
   Il choisit au hasard un sac. La probabilité de choisir le sac A vaut le double de celle de choisir le sac B.
   - Si le sac choisi est A, le joueur en extrait simultanément 3 boules.
     - Si les 3 boules tirées ont la même couleur, on lui remet en plus de sa mise 3.000 francs.
     - Sinon, on lui remet seulement sa mise.
   - Si le sac choisi est B, le joueur en extrait successivement et avec remise 3 boules.
     - Si les 3 boules tirées ont la même couleur, on lui remet 3.000 francs.
     - Sinon, on ne lui remet rien (même pas sa mise)

Soit E l'événement : « Les trois boules tirées ont la même couleur »
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à la fin d'une partie.
(Gain algébrique = somme reçue - mise)

   a) Démontrer que la probabilité de l'événement : « Les 3 boules tirées ont la même couleur et proviennent du sac B» est $\frac{1}{12}$
   b) Quelles sont les valeurs prises par X.
   c) Déterminer la loi de probabilité de X.
   d) Démontrer que l'espérance mathématique de X est : $E(X)=\frac{2250}{7}-\frac{m}{3}$.
   e) Pour quelles valeurs de m le jeu est-il profitable au joueur ?

4. a) Démontrer que $p(E)=\frac{3}{28}$
   b) Un joueur participe n fois au jeu (n est un entier naturel non nul)
   Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité p_n de l'événement :
   « Obtenir au moins une fois trois boules de même couleur » soit supérieure à $0,99$

EXERCICE 2 (5,5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 38z + 26$ et l'équation : $(E) : z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

1. Montrer que z est solution de $(E) \Leftrightarrow \overline{z}$ est solution de (E)
2. a) Justifier que $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 6z + 13)$

   b) En déduire les solutions de (E)

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = 1 - i$, $z_C = 3 - 2i$ et $z_D = 3 + 2i$

1. Placer les points A, B, C et D dans le plan.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.
3. a) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$

   b) En déduire que le trapèze ABCD est inscrit dans un cercle de centre I d'affixe $\dfrac{11}{4}$

   c) Tracer ce cercle.

PROBLEME (10,5 points)

Partie A

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par : $g(x) = x(x-2) - \ln(1-x)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x)$.

   b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
2. Démontrer que $\forall x \in]-\infty; 1[, g'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x - 1}{1 - x}$.
3. a) Etudier le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de g

   b) Dresser le tableau de variation de g
4. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions .On désigne par α la plus grande des solutions

   b) Démontrer que $0,5 < \alpha < 0,6$

   c) Calculer $g(0)$
5. En déduire que $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; 1[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par $f(x) = x + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 2 cm

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   b) Justifier que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat

2. Démontrer que $\forall x \in \left]-\infty; 1\right[, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

3. a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha - 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$

   b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

4. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

   b) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

5. a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty; 0\right[$

   Démontrer que h est une bijection de $\left]-\infty; 0\right[$ dans un intervalle que l'on précisera.

   b) Calculer $h(1-e^{-2})$

   c) Démontrer que la bijection réciproque h^{-1} est dérivable au point $1-e^{-2}$ et calculer $(h^{-1})'(1-e^{-2})$

6. Tracer (D) et (C). On prendra $\alpha \simeq 0,5$