MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
OFFICE DU BACCALAUREAT DU CAMEROUN
COLLEGE ECHOS DU SAVOIR

Examen : BACCALAUREAT N°2
Session : MAI 2021
Série : C / E
Epreuve : Mathématiques
Durée : 04 heures ; coef : 7 / 5

L'épreuve porte sur deux pages, deux parties A et B toutes obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : 15,25 pts

EXERCICE 1 — 03 pts

On considère les équations différentielles (E) : $y'' + y = 0$ et (E') : $x^4y'' + y = 0$. Soit g une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et f $la\ fonction\ définie\ par\ f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E). 0,25 pt
2. Exprimer f'' en fonction de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x. 0,5 pt
3. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si f est solution de (E). 0,5 pt
4. En déduire les solutions de (E'). 0,75 pt
5. Soit g une fonction de (E') sur $]0;+\infty[$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$. 0,5 pt
6. En déduire l'intégrale $A = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$. 0,5 pt

EXERCICE 2 — 04,5 pts

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - lnx - \frac{1}{3}$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1 pt
2. α est un nombre réel strictement positif, on pose $I(\alpha) = \int_\alpha^1 f(t)dt$. Calculer $I(\alpha)$ et préciser sa limite lorsque α tend vers 0. 1 pt
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier naturel tel que $\frac{k}{n} \le t \le \frac{1+k}{n}$ avec $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n} - 1$
   a) Montrer que $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \le \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. 0,5 pt
   b) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le I\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. 1 pt
4. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour tout entier n supérieur ou égal à deux.
   a) Déduire que $I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$. 0,5 pt
   b) Déterminer la limite en 0 de $xf(x)$ puis déterminer la limite de S_n. 0,5 pt

EXERCICE 3 — 04,75 pts

(A) Soit f un endomorphisme de $\mathcal{V}$ tel que $f \circ f = -Id_{\mathcal{V}}$.

1- Démontrer que f est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ et exprimer f^{-1} en fonction de f. 0,5 pt
2- Démontrer que $\vec{0}$ est le seul vecteur invariant par f. 0,5 pt
3- Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \in \mathcal{V}$.
   a) Démontrez que $(\vec{u}; f(\vec{u}))$ est une base de $\mathcal{V}$. 0,5 pt
   b) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{u}; f(\vec{u}))$. 0,5 pt

(B) On considère le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J) ; (E) l'ensemble des points M (x ;y) tels que $x^4 - 16(y^2 - 2)^2 = 0$.

1. Montrer que (E) est la réunion d'une ellipse (E1) et d'une hyperbole (E2) dont on donnera les équations réduites. 0,5 pt
2. Déterminer l'intersection de (E1) et (E2). 0,5 pt
3. Déterminer les éléments caractéristiques de (E2) dans le repère (O,I,J). 0,75 pt

4. On note s la similitude de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport 2.
   a) Donner l'écriture complexe de s. 0,5 pt
   b) Déterminer l'équation cartésienne de (E'1) image de (E1) par s. 0,5 pt

EXERCICE 4 **04 pts**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = i, Z_B = 1+2i, Z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z_B = 3+2i$.
On considère la similitude s qui transforme A en B et C en D. soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z', son image par s.

1- Exprimer z' en fonction de z puis donner les éléments caractéristiques de s. 0,5 pt

2- Soit (U_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, U_n est un entier naturel. 0,5 pt
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}\ et\ U_n$ sont premiers entre eux. 0,25 pt
   c) Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s les termes de U_n. 0,25 pt
   d) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n - 1$. 0,5 pt
   e) Montrer que pour tout entier naturel n et p non nuls tels que n ≥ p,
      on a : $U_n = U_p(U_{n-p}+1) + U_{n-p}$. 0,5 pt
   f) Montrer que pour n ≥ p, on a l'égalité $pgcd(U_n\,;U_p) = pgcd(U_p\,;U_{n-p})$. 0,5 pt
   g) Soit n et p deux entiers naturels non nuls ; montrer que $pgcd(U_n\,;U_p) = U_{pgcd(n;p)}$. 0,5 pt
   h) Déterminer le nombre $pgcd(U_{2012}\,;U_{56})$. 0,5 pt

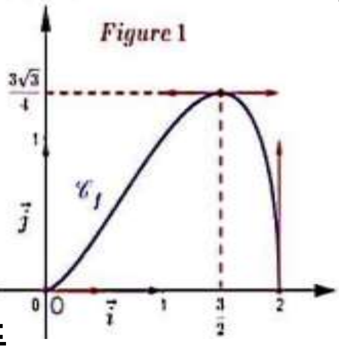
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES : 04,25 pts

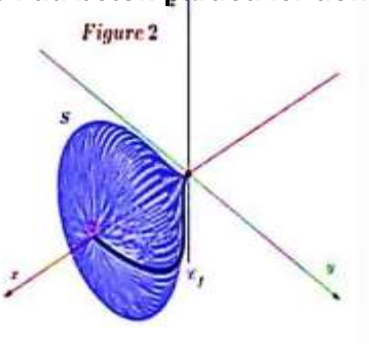
Dans le village de Mr ALAIN, 60% des familles ont une voiture, 65% des familles ont un téléviseur et 24% des familles n'ont ni voiture ni téléviseur. Pour aider les familles nécessiteuses, une ONG aimerait calculer la probabilité pour qu'une famille choisie au hasard ait une voiture sachant qu'elle possède un téléviseur. Elle vous sollicite pour votre expertise.

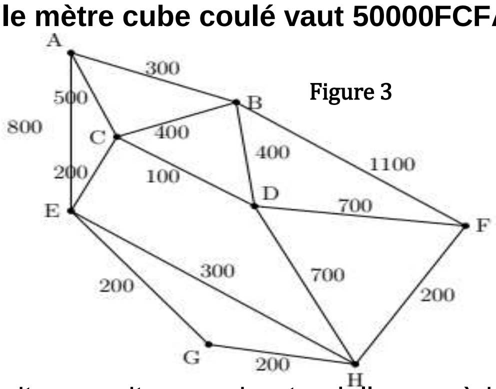
ALAIN décide de construire chez lui un objet d'art ayant la forme de l'oignon représenté par la ci-contre. Pour ce faire, l'ingénieur considère la surface à réaliser son objet d'art comme un plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J) d'unité 2m. L'ingénieur trace la courbe représentative de la fonction numérique $f(x) = x\sqrt{2x-x^2}$ $(figure\ 1)$ sur [0 ;2] puis il opère la rotation de (Cf) autour de l'axe (O,$\vec{\imath}$) engendrant le Solide S (l'oignon) **(figure 2).**

Des contraintes de calendrier imposent un concert dans la ville F immédiatement. Il se trouve présentement dans la ville A. Sur le graphe ci – contre les valeurs représentent les longueurs en kilomètres de chaque tronçon. **(figure 3).**

NB : Ce monument doit être rempli du béton particulier dont le mètre cube coulé vaut 50000FCFA.







Tâches :

(1) Calculer la probabilité que cette famille choisie au hasard ait une voiture sachant qu'elle possède un téléviseur. 1,5 pt
(2) Déterminer la somme à prévoir par ALAIN pour son monument. 1,5 pt
(3) Déterminer en utilisant un algorithme dont on précisera le nom le chemin le plus court et sa longueur pour aller de la ville A à la ville F. 1,25 pt