CAPES Concours externe Option mathématiques
session 2 avril 2019 Épreuve 2

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème nº 1

Notations.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$, dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,
$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$
- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme népérien).

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x,~y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \longmapsto f_a(xy)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a\left(x^r\right) = r\,f_a(x)$.
Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

VI. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.

VIII. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0~;~+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions **VI.** et **VIII.** au cas des logarithmes f_a ?

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\text{Log}(N)$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

1. Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?
2. Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I $\left(\text{en W.m}^{-2}\right)$ selon la formule

$$L = 10\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

où $I_0 = 10^{-12}$ W $\cdot$m^{-2} correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1 000 Hz.

   a. Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de 10^{-5} W $\cdot$m^{-2}.

   b. Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10 dB ?

   c. Une balle lancée d'une hauteur de 2 m atteint après chaque rebond 70 % de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1 mm.
   Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

XV. On suppose que $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

XVII.

En déduire que, si $-1 < x \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \dfrac{1}{3}$.
2. $x = \dfrac{1}{8}$.
3. $x = 1$.

XX.

1. Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\int_p^{N+1} \frac{1}{(2x+a)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2x+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2}\,\mathrm{d}x.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$.
2. Les calculs de la question **XIX.** ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}287\,682\,07 \qquad \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \approx 0{,}117\,783\,04.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

XXII. Montrer que pour tout $x \in]-1\,;\,1[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

XXIII. En déduire que si $x \in [0\,;\,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{1-x^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV.

1. Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?
2. À l'aide de ces valeurs de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.
3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question **XXI.**

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.
2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(p)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

Problème nº 2

Notations.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté $\mathbb{Q}^+$.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m,\ n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
On rappelle que, pour tout élément x non nul de $\mathbb{Q}^+$, il existe un unique couple $(a,\ b)$ d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \dfrac{a}{b}$. Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de x. Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\dfrac{0}{1}$.

Partie A : Somme des cancres

Définition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$. Leur FFI respectives sont notées $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ (a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d sont non nuls, a et b sont premiers entre eux, c et d sont premiers entre eux). La somme des cancres de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

I. Question de cours. Soient a, b, n trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a,\ b) = \text{PGCD}(a,\ b+na)$.

II. Soient x et y deux rationnels positifs.

1. Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.
2. On note $\dfrac{a}{b}$ la FFI de x et $\dfrac{c}{d}$ la FFI de y. La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\dfrac{a+c}{b+d}$?

III. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus 0 = x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$.
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus y = y \oplus x$.
4. Pour tous $x,\ y,\ z, \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.
5. Pour tous $x,\ y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, $\dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x \oplus y}$.
6. Pour tous x , $y \in \mathbb{Q}^+$, pour tout entier naturel n, $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$.

IV. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$.

1. Montrer que $x \oplus y = x$ si, et seulement si, $x = y$.

2. Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.

V. Interprétation géométrique.
On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J). Pour $x \in \mathbb{Q}^+$, de FFI $\dfrac{a}{b}$ on note M_x le point de coordonnées $(b\,;\ a)$.

1. Soient x, $y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que O, $M_{x\oplus y}$ et le milieu de $\left[M_x M_y\right]$ sont alignés.

2. Qu'est la droite $\left(\mathrm{O}M_{x\oplus y}\right)$ pour le triangle $\mathrm{O}M_x M_y$?

VI. Soient $x,\ y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On suppose que $a > c$ et $b < d$.
En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle $\mathrm{O}M_x M_y$ est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

Partie B : suites de Farey

Définition : pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n. On note F_n cette suite. Par exemple :

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{1}\right) \\ F_2 &= \left(\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{1}\right) \\ F_3 &= \left(\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{1}\right) \end{aligned}.$$

VII. Déterminer F_4, F_5 et F_6.

VIII. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer que x est un terme de la suite F_n si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{N}$, b non nul, tels que $x = \dfrac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

IX. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.

X. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1 - x$ également.

XI. On considère l'application suivante :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{Q}^+ & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & (a,\ b) \text{ tel que } \dfrac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{array} \right.$$

1. Montrer que θ est injective.

2. Montrer que θ n'est pas surjective.
   Indication : on pourra montrer que $(2\,;2)$ n'appartient pas à $\theta\left(\mathbb{Q}^+\right)$.
3. Soit x un élément de la suite F_n, non nul. Montrer que $\theta(x) \in [\![1,\ n]\!] \times [\![1,\ n]\!]$.
4. On note f_n le nombre de termes de F_n. Montrer que $f_n \leqslant n^2+1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n=1$.

XII. Soit n un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de n est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \text{card}\left(\left\{k \in [\![1,\ n]\!], \text{PGCD}(k,\ n)=1\right\}\right).$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII. Soit n un entier naturel non nul et soient x et y deux termes consécutifs de la suite F_{n+1} On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de F_n.

1. Montrer qu'il existe $k \in [\![0,\ n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $y = \dfrac{k+1}{n+1}$.
2. Montrer que $x < \dfrac{k}{n} < y$.
3. Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}, alors au moins l'un des deux est un élément de F_n.

XIV. Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) :
« si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_n, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, alors $bc-ad=1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à n. »

1. Démontrer (P_1).
2. On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) est vraie. Soit alors x et y deux termes consécutifs (dans cet ordre) de F_{n+1} dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On rappelle que, dans ce cas, x ou y est un élément de F_n.
   a. Montrer que si x et y sont des éléments de F_n, alors $bc-ad=1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n+1$.
   b. On suppose dans tout ce qui suit que x est un terme de F_n et que y n'est pas un terme de F_n. Soit z le successeur de x dans F_n et $z = \dfrac{r}{s}$ la FFI de z.
   Montrer que $\dfrac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible comprise entre x et z.

c. Montrer que $x < y < z$ puis que $y = x \oplus z$.

d. En déduire que $c = a + r$ et $d = b + s$.

e. Déduire que $bc - ad = rd - sc = 1$.

f. Soit $\dfrac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey F_m d'ordre m strictement supérieur à $n+1$. On pose $u = qc - pd$ et $v = pb - aq$. Montrer que u et v sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv & = & p, \\ bu + dv & = & q. \end{cases}$$

g. Déduire que $x \oplus y$ apparaît dans une suite $F_{m'}$ avec $n+1 < m' \leqslant m$ et que

$$x < x \oplus y < y.$$

h. En déduire que $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.

3. Conclure.

XV. Applications

1. Montrer que si b et d sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey F_n, alors $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

2. Soient x, y et z trois termes consécutifs d'une suite de Farey F_n de FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{c}{f}$. Montrer que $bc - ad = de - fc$ puis que $y = x \oplus z$.