Concours École de santé Bron avril 2007

Avertissement : L'utilisation de calculatrices, de règles à calcul, de formulaires et de papier millimétré n'est pas autorisée. Il ne sera pas fait usage d'encre rouge. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
Le candidat traitera les trois exercices en respectant les notations du texte et la numérotation des questions. AUCUN document ne sera rendu avec la copie.
Les réponses de l'exercice nº 1 (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet. Les exercices nº 2 et nº 3 seront traités sur une copie à part.

EXERCICE 1 **7 points**

1. Soient A et B deux évènements distincts de probabilité non nulle. Alors :

   A : $p_A(B) - p_B(A)$ **B :** $p_A(B)p(A\cap B) = p(A)$

   C : $p_A(B)p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B))^2}{p(A)p(B)}$ **D :** $p(A\cap B) = p(A)p_B(A)$

2. On effectue un tirage simultané de 2 boules indiscernables au toucher parmi 10. Combien y a-t-il de tirages différents ?

   A : 100 **B :** 90 **C :** 45 **D :** 20

3. Soient A et B deux évènements distincts de probabilité non nulle.
   A : Si A et B sont incompatibles alors ils sont indépendants
   B : Si A et B sont indépendants alors ils sont incompatibles
   C : Si A et B sont indépendants alors ils ne sont pas incompatibles
   D : Si A et B sont incompatibles alors A et $\overline{B}$ le sont aussi
4. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions :

   A : $x \longmapsto k\mathrm{e}^{2x}$ **B :** $x \longmapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ **C :** $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-2x}$ **D :** $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$

   (k désigne une constante réelle)
5. $\mathrm{e}^{-3\ln 4}$ est égal à :

   A : -12 **B :** $\dfrac{1}{12}$ **C :** $\dfrac{1}{81}$ **D :** $\dfrac{1}{64}$

6. La fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^{3x}}$ est la fonction :

   A : $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^{3x}}}$ **B :** $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$ **C :** $x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^{3x}}$ **D :** $x \longmapsto \dfrac{3}{2\sqrt{\mathrm{e}^{3x}}}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x$ est égale à

   A : 0 **B :** 1 **C :** $+\infty$ **D :** $\dfrac{1}{2}$

8. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ est la fonction :

A : $x \longmapsto (x-1)\mathrm{e}^x$ **B :** $x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ **C :** $x \longmapsto (x+1)\mathrm{e}^x$ **D :** $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$

9. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.

   A : Si (u_n) diverge alors (v_n) diverge
   B : Si (v_n) est bornée alors (u_n) est majorée
   C : Si (u_n) est croissante alors (v_n) aussi
   D : Si (u_n) est bornée alors (v_n) converge.

10. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $2x+y-3=0$ est :

    A : Une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;\,2\,;\,0)$
    B : Un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,0)$
    C : Un plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$
    D : Un plan passant par le point $\mathrm{H}(0\,;\,-3\,;\,3)$

11. Soit z un complexe non nul et z' défini par $z' = -\dfrac{3}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z. Pour tout $z \neq 0$,

    A : $\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$
    B : $\arg(z') = -\arg(z) + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$
    C : $\arg(z') = \arg(z) + \pi + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$
    D : $\arg(z') = 3\arg(z)\pi + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$

12. La transformation du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = -\mathrm{i}z + 3 + \mathrm{i}$ est :

    A : une homothétie
    B : une symétrie centrale
    C : une rotation
    D : une translation

13. Le complexe $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ a pour argument :

    A : $\dfrac{\pi}{3}$ **B :** $-\dfrac{\pi}{3}$ **C :** $\dfrac{2\pi}{3}$ **D :** $\dfrac{4\pi}{3}$

14. Le réel $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ est égal a :

    A : $2\left(\sqrt{\mathrm{e}}-1\right)$ **B :** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$ **C :** $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1\right)$ **D :** $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1$.

Exercice 2 **7,5 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)\dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Donner la fonction dérivée de f. En déduire le sens de variation de f.
2. Calculer et simplifier $f(\mathrm{e})$, $f\left(\mathrm{e}^2\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
3. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 3$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$.

   Comparer u_n à $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
5. Montrer qu'il existe un seul couple d'entiers naturels non nuls $x < y$ tels que $x^y = y^x$.

EXERCICE 3 **5,5 points**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a,\ \ a > 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ 2u_{n+1} = 3u_n^2$.

1. Montrer que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs,
2. Exprimer les termes u_1 et u_2 en fonction de a.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N},\ \ v_n = \ln(u_n) + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
   Déterminer la nature de la suite (v_n).
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   À quelle condition sur a la suite (u_n) converge-t-elle ?