Concours d'entrée École de santé des armées 2013

1 EXERCICE 1 — 6 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmation A, B, C ou D est exacte. On demande au candidat de signaler sans justification la réponse qui lui parait exacte en cochant sur la grille prévue à cette effet (voir Annexe)
Toute réponse juste est comptée +1 point. Toute réponse fausse est comptée −0,25 point.
Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Question n° 1 : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{\mathrm{e}^x}$ est égale à :

   A : 2 — B : $+\infty$ — C : $+\infty$ — D : 0

2. Question n° 2 : On considère une fonction u définie, strictement positive et dérivable sur un intervalle I. On note u' sa fonction dérivée. On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à I par $f(x) = \ln(u(x))$.

   A : On ne peut pas déterminer le sens de variation de f.
   B : la fonction f est décroissante sur I.
   C : la fonction f est croissante sur I.
   D : la fonction f est croissante puis décroissante sur I.

3. Question n° 3 : Dans l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$
   A : admet une unique solution.
   B : admet exactement deux solutions.
   C : admet une infinité de solutions.
   D : n'admet aucune solution.

4. Question n° 4 : Dans une bibliothèque, on trouve 150 romans et 50 biographies. 40 % des écrivains de romans sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les deux cents ouvrages.
   La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
   A : 0,9 — B : 0,475 — C : 0,7 — D : 0,3

5. Question n° 5 : On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + \mathrm{i}$; $b = 2\mathrm{i}$; $c = 2 - 2\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :
   A : quelconque. — B : isocèle en A. — C : rectangle en A. — D : rectangle en C.

6. Question n° 6 : On considère trois suite (u_n), (v_n), (w_n) qui vérifient la propriété suivante :
   Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
   Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$ alors :
   A : $\lim w_n = 0$ — B : $\lim v_n = 2$ — C : $\lim u_n = -1$ — D : la suite (v_n) n'a pas de limite

2 EXERCICE 2 — 8 points

On considère la fonction f définie sur par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

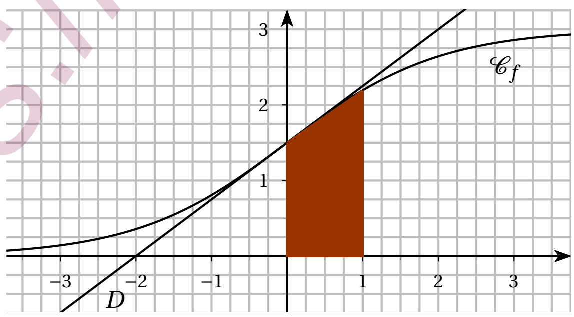
On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.
Dans le repère orthonormé unité 2 cm ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée représente la fonction f et la droite D est sa tangente au point $A\left(0\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.
3. Étudier le sens de variation de f sur puis dresser le tableau de variation complété des limites.
4. Déterminer une équation de la droite D.

DEUXIÈME PARTIE

1. Pour tout réel x, exprimer $F(x)$ en fonction de x.
2. Vérifier que $F(1) = 3\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$
3. Sur le graphe ci-dessous, le domaine grisé est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Calculer l'aire en unités d'aires de ce domaine.



3 EXERCICE 3 — 6 points

Une usine d'assemblage de pièces détachées possède 100 robots. On considère que chacun de ces robots a une probabilité de 0,1 d'être en panne. Le bon fonctionnement d'un robot est indépendant des autres robots. Soit X le nombre de robots en panne dans cette usine.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier soigneusement. Donner l'expression de $P(X = k)$, pour tout $k \in \{0 ; ? ; 1000\}$.

2. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Pour la suite de l'exercice, on donne les valeurs des $P(X = k)$ et des $P(X \leqslant k)$ pour k variant de 0 à 20 arrondi à 10^{-5} près.

k	$p(X = k)$	$p(X \leqslant k)$
0	0,000 03	0,000 03
1	0,000 30	0,000 32
2	0,001 62	0,001 94
3	0,005 89	0,007 84
4	0,015 87	0,023 71
5	0,033 87	0,057 58
6	0,059 58	0,117 16
7	0,088 90	0,206 05
8	0,114 82	0,320 87
9	0,130 42	0,451 29
10	0,131 87	0,583 16
11	0,119 88	0,703 03
12	0,098 79	0,801 82
13	0,074 30	0,876 12
14	0,051 30	0,927 43
15	0,032 68	0,960 11
16	0,019 29	0,979 40
17	0,010 59	0,989 99
18	0,005 43	0,995 42
19	0,002 60	0,998 02
20	0,001 17	0,999 19

3. Quelle est la probabilité que dans un lot de 100 robots, il y ait au moins trois robots défectueux ?

4. Déterminer au seuil de 95 % l'intervalle de fluctuation associé à la loi vérifiée par X.