Concours d'entrée à l'École de Santé de Lyon-Bron

Avertissement : L'utilisation de calculatrices, de règles à calcul, de formulaires et de papier millimétré n'est pas autorisée. Il ne sera pas fait usage d'encre rouge. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.

Année 2009

EXERCICE 1 — 8 points

On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x},$$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geqslant 2$. Prouver que l'aire, en unité d'aires, de la portion de plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = m$ est égale à $\dfrac{2}{\mathrm{e}} - (m+1)\mathrm{e}^{-m}$.
   Quelle est la valeur limite de cette aire lorsque m tend vers $+\infty$?
6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n$.
   a. Calculer u_2, u_3 et u_4.
   b. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.
   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer le sens de variation de (u_n) puis sa limite.

EXERCICE 2 — 6 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 8z + 25 = 0.$$

2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 4 + 3\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 1 + 7\mathrm{i}$.
   a. Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.
   b. Interpréter géométriquement le résultat obtenu, et en déduire la nature du triangle OAB.
3. Soit I le milieu de [OB]. On désigne par C le symétrique de A par rapport à I. Quelle est l'affixe du point C ? Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère OABC ?

‘

EXERCICE 3 — 6 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat de signaler sans justification la réponse qui lui paraît exacte ***en répondant sur la grille prévue à cet effet****.*
Toute réponse juste est comptée $+0,5$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0,25$ *point.*
Une absence de réponse est comptée 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Pour les quatre premières questions, on considère une fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, dont on note $\mathscr{C}$ la représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et dont le tableau de variations est le suivant :

x	0		$\frac{1}{\text{e}}$		e		5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 5	↘	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	3	↘	$\text{e}-2$	↗	2

On peut alors affirmer que :

1. L'équation $f(x) = 0$ admet :

A. 0 solution **B.** 1 seule solution **C.** exactement 2 solutions **D.** 3 solutions ou plus

2. La courbe C :

A. n'admet aucune asymptote **B.** admet une unique asymptote **C.** admet 2 asymptotes **D.** admet 3 asymptotes ou plus

3. La tangente à C au point d'abscisse 3 peut avoir pour équation :

A. $y = 2x + 4$ **B.** $y = -x + 5$ **C.** $y = -4$ **D.** $x = 3$

4. Le réel $I = \displaystyle\int_5^7 f(x)\,\text{d}x$ vérifie la relation :

A. $I \geqslant 6$ **B.** $1 \leqslant I \leqslant 4$ **C.** $0 \leqslant I \leqslant 1$ **D.** $4 \leqslant I \leqslant 6$

5. $\displaystyle\int_{\text{e}}^{\text{e}^2} \frac{1}{x\ln x}\,\text{d}x$ est égal à :

A. $\ln 2$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

6. La valeur moyenne sur $[0\,;\,2]$ de la fonction : $f : x \longmapsto \text{e}^{\frac{x}{2}}$ est :

A. $\text{e}+1$ **B.** $2(\text{e}-1)$ **C.** $\frac{1}{2}(\text{e}-1)$ **D.** $\text{e}-1$

7. A et B sont deux évènements tels que $p(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $p_AB = \frac{3}{5}$. Alors $p(A)$ est égal à :

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{6}{25}$ **D.** $\frac{3}{5}$

8. Dans une loterie de fête foraine, on considère que le nombre de billets est suffisamment grand pour affirmer qu'un billet sur quatre est gagnant. Un joueur achète quatre billets. La probabilité qu'il possède au moins un billet gagnant est :

A. 1 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{175}{256}$ **D.** $\frac{27}{64}$

9. On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' - 3y = 6$. Une fonction f solution de (E) est :

A. $f : x \to \text{e}^{\frac{3}{2}x} + 2$ **B.** $f : x \to \text{e}^{-\frac{3}{2}x} - 2$ **C.** $f : x \to \frac{2}{3}\left(\text{e}^{\frac{3}{2}x+1} - 3\right)$ **D.** $f : x \to \frac{2}{3}\left(\text{e}^{-\frac{3}{2}x+1} - 3\right)$

10. (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.
On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On peut alors affirmer que :

A. (u_n) diverge **B.** (u_n) et (v_n) sont adjacentes **C.** (v_n) converge **D.** (w_n) converge

11. Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Parmi les égalités suivantes, quelle est celle pour laquelle l'ensemble des points M solutions est une sphère de l'espace ?

A. $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$ **B.** $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

C. $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ **D.** $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$

12. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, le plan d'équation $3x-z+1=0$ est parallèle à :

A. l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ **B.** l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ **C.** le plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ **D.** la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{(3\ ;\ 0\ ;\ -1)}$