Concours d'entrée à l'École de Santé de Lyon-Bron

Avertissement : L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe. Les candidats traiteront les trois exercices.
Les réponses de l'exercice nº 1 (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
Les exercices nº 2 et nº 3 seront traités sur une copie à part.

Année 2010

Exercice 1 **7 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte. On demande au candidat de signaler **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet (Voir annexe).
Toute réponse juste est comptée point. Toute réponse fausse est comptée point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. La solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -\dfrac{1}{4}y$ vérifiant la condition initiale $y(0) = \mathrm{e}$ est :

   A. $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x+1}$ **B.** $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ **C.** $y = \mathrm{e}^{-4x+1}$ **D.** $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}x+1}$.

2. Les suites de termes généraux donnés ci-dessous sont divergentes

   A. $\cos\dfrac{1}{n+1}$ **B.** $\dfrac{\sin n}{\ln(n+2)}$ **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^n}{n+1}$ **D.** $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$

3. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^x + \sin[\pi x]$.

   A. $f'(1) = 3\ln 3 - \pi$ **B.** $f'(1) = 0$ **C.** $f'(1) = -\pi$ **D.** $f'(1) = 3\ln 3 - 1$

4. On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

   A. $I + J = \pi$ **B.** $I + J = \dfrac{\pi^2}{4}$ **C.** $I + J = \dfrac{\Pi}{2}$ **D.** $I + J = \dfrac{\Pi^2}{8}$

5. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x\mathrm{e}^x$, alors :

   A. $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}$ **B.** $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$ **C.** $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ **D.** $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}$

6. Une urne contient 8 boules dont 3 rouges et 5 noires, et 6 cubes dont 2 rouges et 4 noirs.
   On effectue un tirage de deux objets simultanément, en supposant les tirages équiprobables.
   Alors la probabilité de tirer un cube et une boule de couleurs différentes est :

   A. $\dfrac{22}{91}$ **B.** $\dfrac{69}{91}$ **C.** $\dfrac{1}{182}$ **D.** $\dfrac{2}{91}$

7. Soit $z = \sin\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ alors :

   A. $\arg(z) = \theta$ **B.** $\arg(z) = \pi - \theta$ **C.** $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ **D.** $\arg(z) = \theta + \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale dont on précisera les équations.
2. Justifier rigoureusement que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$.
3. Dresser alors le tableau de variations complet de la fonction f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

EXERCICE 3 **7 points**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 4$, $z_{\mathrm{B}} = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ? Justifier.
2. Soit E le point d'intersection des diagonales OB et AC. Démontrer que l'affixe du point E est donnée par $z_{\mathrm{E}} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, puis mettre cette affixe sous forme exponentielle.
   À partir du point E, on construit la suite de points suivants :

   M_1 est défini par $\overrightarrow{\mathrm{O}M_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}},\,\overrightarrow{\mathrm{O}M_1}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad(2\pi)$.

   Chaque point est obtenu en fonction du précédent par les relations suivantes :

   $$\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{O}M_n} \text{ et } \left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_n},\,\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{3}\quad(2\pi).$$

   Pour tout entier naturel n, on appelle z_n l'affixe du point M_n.
3.
   a. Déterminer l'affixe z_1 du point M_1.

   b. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

   c. En déduire l'expression de z_n en fonction de n, pour n entier naturel non nul.