CORRIGÉ BACC BLANC Série C 2021
LYCÉE CLASSIQUE D'EDEA.

Par M. Nathanaël AWONO-MESSI
PLEG Maths.

PARTIE A. EVALUATION DES RESSOURCES.

Exercice 1.

1. Démontrons que la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

- Un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(2;-1;-1)$.
- Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(-2;1;1)$.

0,5pt

Il est clair que $\vec{u} = -\vec{n}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, par conséquent la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

2. Donnons l'expression analytique de S.

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace et $M'(x',y',z')$ son image par S.

$$S(M) = M' \iff \begin{cases} \cdot (MM') \perp (\mathcal{P}) \\ \cdot I \in (\mathcal{P}) \text{ où } I \text{ est milieu de } [MM']. \end{cases}$$

$\cdot (MM') \perp (\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = x + 2\lambda \\ y' = y - \lambda \\ z' = z - \lambda \end{cases}$$

$\cdot$ I milieu de $[MM'] \iff I\left(\frac{x+x'}{2} ; \frac{y+y'}{2} ; \frac{z+z'}{2}\right)$

$$I \in (\mathcal{P}) \iff 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{y+y'}{2} - \frac{z+z'}{2} - 3 = 0$$

1pt

$$\iff 2(x+x') - (y+y') - (z+z') - 6 = 0$$

$$\iff 2(x + x + 2\lambda) - (y + y + \lambda) - (z + z - \lambda) - 6 = 0$$

$$\iff 4x - 2y - 2z + 6\lambda - 6 = 0$$

$$\iff 6\lambda = -4x + 2y + 2z + 6 \iff \lambda = \frac{1}{3}(-2x + y + z + 3)$$

Ceci étant : $\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3}(-2x+y+z+3) = \frac{1}{3}(-x+2y+2z+6) \\ y' = y - \frac{1}{3}(-2x+y+z+3) = \frac{1}{3}(2x+2y-z-3) \\ z' = z - \frac{1}{3}(-2x+y+z+3) = \frac{1}{3}(2x-y+2z-3). \end{cases}$

L'expression analytique de S est : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x+2y+2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x+2y-z-3) \\ z' = \frac{1}{3}(2x-y+2z-3) \end{cases}$

3. Déterminons les coordonnées du point H, intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$.

H étant le point d'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$, alors $\begin{cases} H \in (\mathcal{D}) \\ H \in (\mathcal{P}). \end{cases}$

- $H \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AH} = t\vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H - 2 \\ z_H - 3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1-2t \\ y_H = 2+t \\ z_H = 3+t \end{cases}$.

- $H \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 2(1-2t) - (2+t) - (3+t) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -6t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1$, Ainsi $H(3;1;2)$.

0,5pt

4. Donnons par son équation l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{MH} = \sqrt{3}$.

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \frac{MA}{MH} = \sqrt{3} \Leftrightarrow AM^2 = 3HM^2$

0,25pt

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3\left[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 3(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 18x - 6y - 12z + 42$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 2y - 6z + 28 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x - y - 3z + 14 = 0.$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 8x - y - 3z + 14 = 0.}$

0,5pt

5. Donnons la nature de $\mathcal{S}$ et déterminons ses éléments caractéristiques.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{S} \iff x^2+y^2+z^2-8x-y-3z+14=0$$
$$\iff (x-4)^2-16+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+14=0$$
$$\iff (x-4)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

0,5pt

$\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\left(4;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2.

1. (a) Calculons la probabilité pour que la conique $H_{a,b}$ d'équation $2ax^2+(-1)^b y^2=1$ soit une hyperbole.

$H_{a,b}$ est une hyperbole si $(a=1 \text{ et } b=1)$ ou $(a=-1 \text{ et } b=0)$ ou $(a=1 \text{ et } b=-1)$.

Si A désigne cet évènement, alors $P(A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{8}{20}$

Ainsi, $\boxed{P(A)=0{,}4.}$ 0,5pt

(b) Calculons la probabilité pour que l'équation différentielle $E_{a,b}: y''+ay'+by=0$ ait pour solutions $f: x \longmapsto (Ax+B)e^x$.

L'équation caractéristique d'inconnue r de $E_{a,b}$ est $r^2+ar+b=0$

$\Delta=a^2-4b$.

$E_{a,b}$ a pour solutions les fonctions $f: x \longmapsto (Ax+B)e^x, (A,B\in\mathbb{R})$

$$\iff \begin{cases}\Delta=0\\ r_0=1\end{cases} \iff \begin{cases}a^2-4b=0\\ -\frac{a}{2}=1\end{cases} \iff \begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$$ ce qui est impossible !

Si B désigne cet évènement, alors $\boxed{P(B)=0.}$ 0,5pt

(c) Calculons la probabilité pour que les plans $(P): ax+ay+bz+3=0$ et $(Q): ax+by+z+3=0$ soient parallèles.

- Un vecteur normal à (P) est $\vec{n}_P(1;a;b)$
- Un vecteur normal à (Q) est $\vec{n}_Q(a;b;1)$

$(P)\parallel(Q) \iff \overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ sont colinéaires

$\iff \overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=\vec{0}$

$\iff (a-b\,;\,ab-1\,;\,b-a^2)=(0;0;0)$

$\iff \begin{cases} a=b \\ ab=1 \\ b=a^2 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

0,5pt

les plans (P) et (Q) sont parallèles si ($a=1$ et $b=1$).

Si C désigne cet évènement, alors $P(C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=0{,}1$.

$\boxed{P(C)=0{,}1.}$

2. Déterminons la loi de probabilité de X.

X désigne la variable aléatoire égale à $|a+b|$ où a désigne le numéro de la 1ère boule tirée et b celui de la deuxième boule tirée

Comme $a\in\{-1;0;1\}$, $b\in\{-1;0;1\}$, alors $|a+b|\in\{0;1;2\}$

Ainsi $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

- $X=0 \iff (a=1$ et $b=-1)$ ou $(a=-1$ et $b=1)$

$$P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{8}{20}=0{,}4.$$

- $X=1 \iff (a=-1$ et $b=0)$ ou $(a=1$ et $b=0)$ ou $(a=0$ et $b=-1)$ ou $(a=0$ et $b=1)$

$$P(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{8}{20}=0{,}4.$$

- $X=2 \iff (a=-1$ et $b=-1)$ ou $(a=1$ et $b=1)$

$$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{20}=0{,}2.$$

1pt

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,4	0,4	0,2

Calculons E(X) et V(X).

$$E(X)=\sum x_i p_i = 0{,}4\times 0+1\times 0{,}4+2\times 0{,}2$$
$$=0{,}8.$$

$\boxed{E(X)=0{,}8.}$ 0,25pt

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0^2 \times 0{,}4 + 1^2 \times 0{,}4 + 2^2 \times 0{,}2 - (0{,}8)^2$$
$$= 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}56. \quad \boxed{V(X) = 0{,}56.}$$

0,25pt

Exercice 3

1. Précisons la nature de (Γ) et déterminons son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer.

$M \in (\Gamma) \iff \dfrac{d(M,F)}{d(M,(\Delta))} = 2 \iff \dfrac{MF}{MH} = 2$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (Δ).

0,75pt

(Γ) est une hyperbole d'excentricité $e = 2$; Un de ses foyers est le point $F(0;4)$ et la directrice associée à ce foyer est la droite (Δ).

2. Déterminons une équation de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (Δ), alors $H\left(x;\frac{3}{2}\right)$

$$M \in (\Gamma) \iff \frac{MF}{MH} = 2$$
$$\iff FM^2 = 4HM^2 \iff x^2 + (y-4)^2 = 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2$$
$$\iff x^2 + y^2 - 8y + 16 = 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right)$$
$$\iff x^2 + y^2 - 8y + 16 = 4y^2 - 12y + 9$$
$$\iff x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0.$$

$$\boxed{(\Gamma) : x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0}$$

0,75pt

3.(a) Donnons l'écriture complexe de φ.

φ étant la similitude directe plane de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, alors son écriture complexe est $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$

Soit $\boxed{z' = 2iz.}$

0,25pt

(b) Donnons la nature exacte de (Σ) et précisons son excentricité.

On a: (Σ) est l'image de (Γ) par φ.
(Γ) est une hyperbole d'excentricité $e=2$
φ est la similitude plane directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

donc (Σ) est une hyperbole d'excentricité 2. 0,5pt

Exercice 4.

1. Etudions les variations de f.

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x+1)e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x}\right) = 0$$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x+1)'e^{-2x} + (e^{-2x})'(2x+1) = 2e^{-2x} - 2(2x+1)e^{-2x}$$
$$= (2-4x-2)e^{-2x}$$
$$= (-4x)e^{-2x} = -4xe^{-2x}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-2x}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-4x$.
Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

0,75pt

2. Déterminons une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse $\frac{1}{2}$.

(T) : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$. $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)e^{-2\times\frac{1}{2}} = -\frac{2}{e}$.

et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2\times\frac{1}{2}+1\right)e^{-2\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{e}$.

Ainsi, (T) : $y = -\frac{2}{e}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{e} = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}$.

$$\boxed{(T) : y = \frac{-2}{e}x + \frac{3}{e}.}$$ 0,25pt

3.(a) Déterminons $g'(x)$ et $g''(x)$.

g est une fonction deux-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

on a : $g'(x) = f'(x) + \frac{2}{e} = -4xe^{-2x} + \frac{2}{e}$. 0,25pt

$g''(x) = f''(x) = (-4x)'e^{-2x} + (e^{-2x})'(-4x)$

$= -4e^{-2x} + 8xe^{-2x} = (-4+8x)e^{-2x}$ 0,25pt

(b) Déterminons le signe de $g(x)$ et déduisons-en la position relative de $\mathcal{C}$ et (T).

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc le signe de $g''(x)$ est celui $8x-4$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

g' est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

De plus $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)e^{-1} + \frac{2}{e} = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$

par conséquent g est croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5pt

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$, $g(x) < 0$

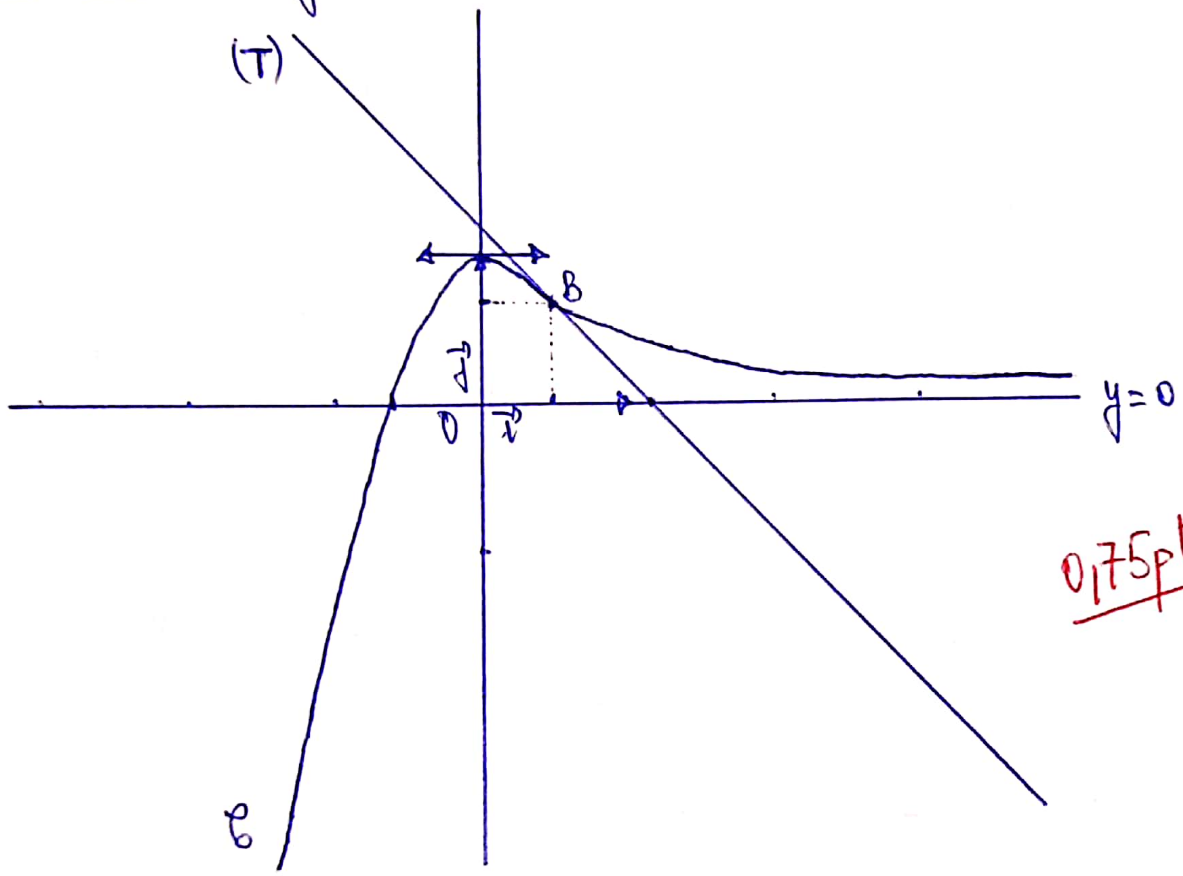
- pour tout $x \in]\frac{1}{2};+\infty[$, $g(x) > 0$
- pour $x = \frac{1}{2}$, $g(x) = 0$.

On en déduit que • $\mathcal{C}$ est au-dessous de (T) sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$. 0,5pt

• $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T) sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.

• $\mathcal{C}$ et (T) se rencontrent pour $x = \frac{1}{2}$ (au point B)

(c) Traçons la tangente (T) et la courbe $\mathcal{C}$.



0,75pt

Note $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) e^{-2x} = 0$, donc $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{j})$.

4. Calculons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)\,dx \text{ u.A.} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} (2x+1)e^{-2x}\,dx \text{ u.A.}$$

Posons $u(x) = 2x+1$ $\qquad u'(x) = 2$.

$v'(x) = e^{-2x}$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} -2e^{-2x}\,dx \text{ (en u.A)}$$

$= -\frac{1}{2}(2\lambda+1)e^{-2\lambda} - \frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} = -\frac{1}{2}(2\lambda+1)e^{-2\lambda} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{e}{2}$ UA

$= (-\lambda-1)e^{-2\lambda} + \frac{e}{2}$ UA. 0,75pt

5. <u>Vérifions que $H: x \longmapsto \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)e^{-4x}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.</u>

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H'(x) = \left(-2x - \frac{3}{2}\right)e^{-4x} - 4e^{-4x}\left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)$$

$$= \left(-2x - \frac{3}{2} + 4x^2 + 6x + \frac{5}{2}\right)e^{-4x} = (4x^2 + 4x + 1)e^{-4x}$$

$$= (2x+1)^2 e^{-4x} = h(x)$$ 0,5pt

donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

6. <u>Calculons le volume V du solide de révolution engendré par la rotation du domaine $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses pour $\lambda = \frac{1}{2}$.</u>

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x))^2 dx \text{ (en u.V)}.$$

$$= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2x+1)^2 e^{-4x} dx \text{ (en u.V)} = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x)\, dx \text{ (en u.V)}$$

$$= \pi \left[H(x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{ (en u.V)}.$$

or $H\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right)e^{-2} = -\frac{13}{8}e^{-2} = -\frac{13}{8e^2}$.

et $H\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right)e^{2} = -\frac{1}{8}e^2$.

donc $H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}e^2 - \frac{13}{8e^2} = \frac{e^4}{8e^2} - \frac{13}{8e^2} = \frac{e^4 - 13}{8e^2}$.

Ceci étant $V = \left(\frac{e^4 - 13}{8e^2}\right)\pi$ u.V. 0,5pt

B) 1. <u>Déterminons $\ker\varphi$ et donnons-en une base.</u>

$\ker\varphi = \{\vec{u} \in E \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_E\}$

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in E$, $\vec{u} \in \ker\varphi \iff \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_E$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ +x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\varphi$ est une droite vectorielle dont un système d'équations est $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0. \end{cases}$

$\cdot$ $(x;y;z)=(x;0;-x) = x(1;0;-1) = x\vec{e_1}$ où $\vec{e_1} = \vec{i}-\vec{k}$

Une base de $\mathrm{Ker}\varphi$ est $\vec{e_1}$.

0,5pt

2. Déterminons $\mathrm{Im}\varphi$, puis déterminons une base de $\mathrm{Im}\varphi$.

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\vec{v} \in E \mid \exists \vec{u} \in E, \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}.$$

Soit $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \in E$,

$\vec{v} \in \mathrm{Im}\varphi \Leftrightarrow \exists \vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \in E \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{v}$.

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=x' \\ y=y' \\ +x+z=z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=+z' \\ y'=y. \end{cases}$$

0,5pt

Ainsi, $\vec{v} \in \mathrm{Im}\varphi \Leftrightarrow \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + x'\vec{k} \Leftrightarrow \vec{v} = x'(\vec{i}+\vec{k}) + y'\vec{j}$

$\mathrm{Im}\varphi$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$ où $\vec{e_2} = \vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{e_3} = \vec{j}$.

une base de $\mathrm{Im}\varphi$ est $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$.

3. Montrons que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}\varphi$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}\varphi$.

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E.

On a : $\vec{e_1} = \vec{i} - \vec{k}$; $\vec{j} = \vec{e_3}$ et $\vec{e_2} = \vec{i}+\vec{k}$, donc $\vec{i} = \dfrac{\vec{e_1}+\vec{e_2}}{2}$; $\vec{j} = \vec{e_3}$ et $\vec{k} = \dfrac{-\vec{e_1}+\vec{e_2}}{2}$.

Ceci étant : $\vec{u} = x\left(\dfrac{\vec{e_1}+\vec{e_2}}{2}\right) + y\vec{e_3} + z\left(\dfrac{-\vec{e_1}+\vec{e_2}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}(x-z)\vec{e_1} + \frac{1}{2}(x+z)\vec{e_2} + y\vec{e_3}$

0,5pt

$= \vec{u_1} + \vec{u_2}$ avec $\vec{u_1} = \frac{1}{2}(x-z)\vec{e_1} \in \mathrm{Ker}\varphi$; $\vec{u_2} = \frac{1}{2}(x+z)\vec{e_2} + y\vec{e_3} \in \mathrm{Im}\varphi$

L'unicité provient du fait que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de E.

PARTIE B : EVALUATION DES COMPÉTENCES C_1, C_2, C_3.

Tâche 1. Déterminons le montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA pour l'achat du sable.

- **Déterminons les entiers naturels a et b.**

On résout le système : $\begin{cases} a < b \\ a^2+b^2 = 4625 \\ PPCM(a;b) = 440 \end{cases}$

posons $\delta = PGCD(a;b)$, alors δ divise a et δ divise b donc δ^2 divise a^2 et b^2, par suite δ^2 divise $a^2+b^2 = 4625$.

or $4625 = 1^2 \times 5^2 \times 185$, donc $\delta^2 \in \{1^2; 5^2\}$ et comme $\delta > 0$ alors $\delta \in \{1; 5\}$.

- $\delta = 1 \Leftrightarrow ab = PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = 440$
  Ainsi $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 4625 + 2(440) = 5505$
  Comme $\sqrt{5505} \notin \mathbb{N}$, alors $\delta \neq 1$.
- $\delta = 5 \Leftrightarrow ab = PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = 2200$.
  Ainsi $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 9025 \Leftrightarrow a+b = 95$ car $a+b>0$.

1pt

De même, $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab = 225 \Leftrightarrow a-b = -15$ car $a-b<0$

le système ci-dessus est donc équivalent à : $\begin{cases} a+b = 95 \\ a-b = -15 \end{cases}$

donc $2a = 80$ et $2b = 110$

c'est-à-dire $a = 40$ et $b = 55$.

- **Volume de sable contenu dans le bac plein.**

0,25pt

$V_{sable} = V_{bac\ plein} = 2\,m \times 0{,}1 \times 40\,m \times 0{,}2 \times 55\,m = 88\,m^3$.

- **Montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA**

$88 \times 9000F = 792.000$ FCFA.

0,25pt

Tâche 2. Déterminons le montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA pour satisfaire tous les transporteurs de son sable.

- Déterminons le nombre de garçons et le nombre de filles.

Soit x le nombre de garçons et y le nombre de filles. $(x>0, y>0)$

- le sable devra être transporté en 200 tours signifie que :
$9x+7y=200$
- On souhaite qu'il y ait plus de garçons que de filles signifie que $x>y$.

On résout donc l'équation $9x+7y=200$ sachant que $x>y$

Nous avons $9=7\times1+2$

$7=2\times3+1$, donc $1=7-2\times3$

$= 7-3(9-7\times1)$

$= 9\times(-3)+7\times4$

Ceci étant $200=9(-600)+7\times800$.

1pt

$9x+7y=200 \Leftrightarrow 9x+7y=9(-600)+7\times800$

$\Leftrightarrow 9(x+600)=7(800-y)$.

or 7 divise $7(800-y)$, donc 7 divise $9(x+600)$ et comme 9 et 7 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de GAUSS, 7 divise $x+600$.

Ainsi, il existe un entier relatif k tel que $x+600=7k$ c'est-à-dire $x=7k-600$.

On en déduit de façon analogue que $y=800-9k$, $k\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7k-600>0 \\ 800-9k>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{600}{7} \\ k<\frac{800}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{600}{7}<k<\frac{800}{9}$$

$$\Rightarrow 85{,}71<k<88{,}8$$

$x>y \Leftrightarrow 7k-600>800-9k \Leftrightarrow k>\frac{1400}{16}=87{,}5$, donc $\boxed{k=88}$

Ceci étant : $x = 7\times88 - 600 = 16$. et $y = 800 - 9\times88 = 8$.

Ce groupe d'enfants comptait 16 garçons et 8 filles.

Soit 24 enfants. 0,25pt

- Montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA.

$$24 \times 1500F = 36.000 \text{ FCFA}.$$ 0,25pt

Tâche 3 Déterminons le montant nécessaire à prévoir pour entourer son champ de plants d'arbres fruitiers.

- Nombre de plants d'arbres fruitiers.

Soit d la distance entre deux plants d'arbres fruitiers consécutifs.

- Comme il y a un plant d'arbre fruitier à chaque sommet du champ, alors d doit être un diviseur commun de 132, 156 et 204
- De plus, on veut entourer le champ avec un minimum d'arbre fruitiers, donc d doit être le plus grand possible.

Ainsi, $d = PGCD(132; 156; 204)$.

$$132 = 2^2\times3\times11 \;;\; 156 = 2^2\times3\times13 \;;\; 204 = 2^2\times3\times17$$

$$d = 2^2\times3 = 12.$$

La distance entre deux plants d'arbres fruitiers est $d = 12$ m.

- Le pourtour (Périmètre) du champ est : 1,25pt

$$\mathcal{P} = 132m + 156m + 204m = 492m.$$

- Le nombre de plants d'arbres fruitiers est donc $\frac{492}{12}$ soit 41 plants.

- Montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA.

$$41 \times 1250F = 51250 \text{ FCFA}.$$ 0,25pt