

♣ Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021 J2 ♣

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Candidats libres

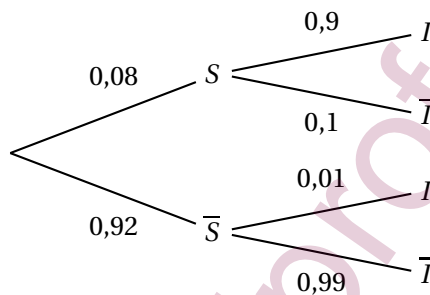
Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1.



2. a. On a $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$
 b. On a de même $P(\bar{S} \cap I) = P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(I) = 0,92 \times 0,01 = 0,0092$.
 D'après la loi des probabilités totales :
 $P(I) = P(S \cap I) + P(\bar{S} \cap I) = 0,072 + 0,0092 = 0,0812$.
 c. Il faut calculer $P_I(S) = \frac{P(I \cap S)}{P(I)} = \frac{0,072}{0,0812} \approx 0,887$ soit 0,89 au centième près.
3. a. Les tirages étant indépendants les uns des autres et étant assez nombreux on peut considérer que la variable Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,08$.
 b. On a $P(Z = 0) = 0,08^0 \times 0,92^{50} \approx 0,15466$;
 $P(Z = 1) = \binom{50}{1} \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,067426$, donc
 $P(Z \geq 2) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1)] = 1 - (0,15466 + 0,067426) \approx 0,2221$, soit 0,22 au centième près.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

1. Pour $t = -2$, on trouve les coordonnées de B.
 2. Le vecteur \overrightarrow{AB} admet pour coordonnées : $(2 - 1 ; 1 - 0 ; 0 - (-2))$ soit $(1 ; 1 ; 2)$
 3. $M(x ; y ; z) \in (AB)$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ soit :

$$\begin{cases} x-1 = 1 \times t \\ y-0 = 1 \times t \\ z-2 = -2 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. La droite Δ a pour vecteur directeur $\delta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit \mathcal{P} le plan dont on cherche une équation.

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{CM} \cdot \delta = 0 \iff 2(x-0) + 1(y-1) - 1(z-2) = 0 \iff \\ 2x + y - 1 - z + 2 = 0 \iff 2x + y - z + 1 = 0.$$

5. En faisant apparaître le point A dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$: le vecteur \overrightarrow{AD} est une combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

EXERCICE 3

Commun à tous les candidats

6 points

Partie I

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
 - On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- la fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :
 $f'(x) = 1 - (-2)e^{-2x} = 1 + 2e^{-2x}$.
 On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc $1 + 2e^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée est positive donc la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.
- La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante; comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.
 La calculatrice donne :
 $f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0,865$, donc $0 < \alpha < 1$;
 $f(0,4) \approx -0,05$ et $f(0,5) \approx 0,13$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;
 $f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,007$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.
- On a donc :
 - sur $] -\infty; \alpha[$, $f(x) < 0$;
 - sur $] \alpha; +\infty[$, $f(x) > 0$;
 - et $f(\alpha) = 0$.

Partie II

1.

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

- a. Soit $u(t) = t^2 + e^{-2t}$, donc $h(t) = \sqrt{u(t)}$ fonction dérivable car composée de deux fonctions « racine » et h dérivables.

$$\text{Donc } h'(t) = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \frac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

- b. Le dénominateur étant positif, le signe de $h'(t)$ est celui du numérateur soit $f(t)$ dont on a vu le signe dans la partie I.

Donc :

- sur $] -\infty ; \alpha[$, $f(t) < 0$ donc $h'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle;
- sur $] \alpha ; +\infty[$, $f(t) > 0$ donc $h'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle;
- et $f(\alpha) = 0$, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h .

La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M est alors $e^{-\alpha}$.

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point $A(\alpha ; e^{-\alpha})$.

α est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe \mathcal{C} au point A .

2. a. Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha) = -e^{-\alpha}$
- b. D'après le rappel le produit des coefficients directeurs est $-e^{-\alpha} \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = -\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}$.

or on sait que $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - e^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = e^{-2\alpha} \iff \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$, donc finalement le produit des coefficients directeurs est égal à -1 . La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Voir à la fin.

EXERCICE au choix du candidat

5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques; raisonnement par récurrence.

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 ;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. • $u_1 = \frac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \frac{58}{5}$;
 • $v_1 = \frac{16 + 5}{2} = \frac{21}{2}$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \frac{u_n - v_n}{10} = \frac{w_n}{10}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \frac{1}{10} w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 16 - 5 = 11$.

On sait qu'alors pour tout naturel n , $w_n = 11 \times (0,1)^n$.

b. Comme $0,1 > 0 \Rightarrow 0,1^n > 0$ et $11 > 0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres supérieurs à zéro.

D'autre part $0 < 0,1 < 1$ entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

3. a. Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{5u_n}{5} = \frac{-2u_n + 2v_n}{5} = -\frac{2}{5}(u_n - v_n) = -\frac{2}{5}w_n = -\frac{4}{10}w_n = -0,4w_n$

b. On a vu à la question 2. b. que $w_n > 0$, quel que soit le naturel n , donc $-0,4w_n < 0$ et par conséquent :

$u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

c. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.

Initialisation : On a $u_0 = 16 \geq 5$: la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 5$.

On a donc $3u_n \geq 15$ (1) et comme on a admis que $v_n \geq 5$, on a $2v_n \geq 10$ (2).

On peut ajouter membre à membre (1) et (2) pour obtenir :

$3u_n + 2v_n \geq 25$ d'où en multipliant par le nombre positif $\frac{1}{5}$:

$\frac{3u_n + 2v_n}{5} \geq 5$ et finalement $u_{n+1} \geq 5$.

Conclusion : la minoration par 5 est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 5$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 5 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geq 5$.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

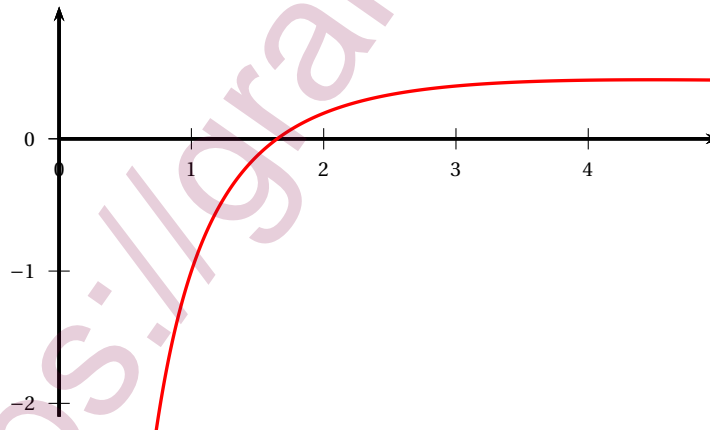
4. a. On a vu à la question 2.b. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ ou encore que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.
- b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Donc : $c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2(u_n + v_n) = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n = 5u_n + 4v_n = c_n$.
Donc la suite (c_n) est constante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = 100$.
- c. Puisque $c_n = 5u_n + 4v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont même limite ℓ , on a donc :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 100 = 100 = 5\ell + 4\ell = 9\ell$.
 $9\ell = 100$ donc $\ell = \frac{100}{9}$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie 1

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$$



1. Dans $]0; +\infty[$, $f(x) = 0 \iff \frac{2\ln(x) - 1}{x} = 0$, on a donc
 $2\ln(x) - 1 = 0 \iff 2\ln(x) = 1 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}}$.
 $S = \left\{ e^{\frac{1}{2}} \right\}$.
Rem. $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1,649 \approx 1,65$ au centième près.

- 2. • Sur $]0; e^{\frac{1}{2}}[$, on a $f(x) < 0$;
- Sur $]e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, on a $f(x) > 0$;
- $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 0$.

Partie II

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$, donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

- b. $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty, \text{ on obtient par produit :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. La fonction $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$g'(x) = \frac{1}{x} \times [\ln(x) - 1] + \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} [\ln(x) - 1 + \ln(x)] = \frac{1}{x} \times (2\ln(x) - 1) = \frac{2\ln(x) - 1}{x} = f(x).$$

3. Le signe de $f(x) = g'(x)$ a été trouvé à la question 2 de la partie I; on a donc :

- Sur $]0; e^{\frac{1}{2}}[$, on a $g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle
- Sur $]e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, on a $g'(x) > 0$: la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle
- $g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 0$: $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

| | | | | | |
|---------|-----------|-------------------|----------------|---|-----------|
| x | 0 | $e^{\frac{1}{2}}$ | $+\infty$ | | |
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |
| g | $+\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |

4. Comme $-\frac{1}{4} = -0,25$, le tableau de variations montre que l'équation $g(x) = m$, avec $m > -0,25$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $]0; e^{\frac{1}{2}}[$, l'autre sur $]e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

5. Dans $]0; +\infty[$, $g(x) = 0 \iff \ln(x)[\ln(x) - 1] = 0 \iff \begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \ln(x) - 1 = 0 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \ln(x) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases}$$

$$S = \{1; e\}.$$

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3

