

∞ Corrigé du baccalauréat Métropole 7 juin 2021 ∞

Candidats libres Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ de l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$.

On donne f'' , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^3}$.

1. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - 1 \times e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2}.$$

Réponse **c**.

2. Comme sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $e^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 1$.

$$+ f'(x) = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2};$$

$$+ f'(x) < 0 \iff 2x - 1 < 0 \iff x < \frac{1}{2} : \text{ la fonction } f \text{ est décroissante sur }]0; \frac{1}{2}[;$$

$$+ f'(x) > 0 \iff 2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2} : \text{ la fonction } f \text{ est croissante sur }]\frac{1}{2}; +\infty[;$$

Conclusion : $f(\frac{1}{2})$ est le minimum de la fonction sur $]0; +\infty[$.

Réponse **c**.

3. On a : $f(x) = 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}$.

En posant $X = 2x$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \lim_{X \rightarrow +\infty} X = +\infty$.

On sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Réponse **a**.

4. Sur $]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ et $2e^{2x} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui du trinôme $2x^2 - 2x + 1$.

$$\text{Or } 2x^2 - 2x + 1 = 2(x^2 - x + \frac{1}{2}) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Donc $f''(x)$ somme de deux nombres positifs est positive sur $]0; +\infty[$. La fonction est donc convexe sur $]0; +\infty[$.

Réponse **b**.

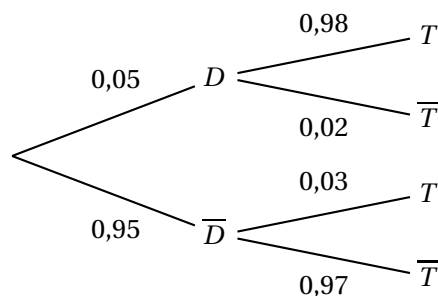
EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

PARTIE I

1. On traduit la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. **a.** On a : $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$.

b. On a de même : $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,3 = 0,0285$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775.$$

3. La valeur prédictive positive du test est égale à :

$$P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,049}{0,0775} \approx 0,6322, \text{ soit } 0,632 \text{ au millième près.}$$

Comme $0,632 < 0,95$ on peut en déduire que le test n'est pas efficace.

PARTIE II

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise et avec une probabilité constante de choisir un produit défectueux égale à $0,05$, on peut donc dire que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.
2. On a : $p(X = 0) = 0,05^0 \times 0,95^{20}$.
Donc la probabilité cherchée est $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,642$, soit $0,64$ au centième près.
3. On a : $E = n \times p = 20 \times 0,05 = 1$.
Cela signifie que sur un grand nombre de tirages d'échantillons on trouvera 1 pièce défectueuse sur 20 pièces tirées.

EXERCICE 3

6 points

Commun à tous les candidats

I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3 - (-19) = 1,3 + 19 = 20,3$ soit une augmentation de $2,03$ °C.

Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25 \times 2,03 = 50,75$ (°C).

Les gâteaux seraient donc à une température de $-19 + 50,75 = 31,75$ (°C) alors que la température ambiante est de 25 °C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$. On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante : pour tout n , $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

1. On a : $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$
 $\iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.
2. + Avec $n = 0$, la relation donne $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$;
+ Avec $n = 1$, la relation donne $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15,3784 = -13,8784$.
3. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $T_n \leq 25$.
Initialisation - $T_0 = -19 \leq 25$; l'inégalité est vraie au rang 0.
Hérédité - Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 25$ alors en multipliant par $0,94$:
 $0,94T_n \leq 0,94 \times 25$, soit $0,94T_n \leq 23,5$.
D'où en en ajoutant à chaque membre $1,5$:
 $0,94T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$, soit finalement $T_{n+1} \leq 25$: l'inégalité est vraie au rang n .

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 25$.

Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente $T_n \leq 25$ soit en multipliant par 0,06 :

$$0,06T_n \leq 0,06 \times 25, \text{ ou } 0,06T_n \leq 1,5$$

et en prenant les opposés : $-1,5 \leq -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

$$0 \leq -0,6T_n + 1,5.$$

On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geq 0$: la suite (T_n) est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : d'après le théorème de la convergence monotone, cette suite converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leq 25$.

6. On pose pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$.

- a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore

$$U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94 \left(T_n - \frac{23,5}{0,94} \right) = 0,94(T_n - 25), \text{ soit finalement } T_{n+1} = 0,94U_n : \text{ cette égalité montre que la suite } (U_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 0,94 \text{ et de premier terme } U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44.$$

- b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou $U_n = -44 \times 0,94^n$.

Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :

$$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

- c. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. a. On a : $T_{25} = 25 - 44 \times 0,97^{25} \approx 15,632$ soit environ 16°C .

- b. La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17^e et la 18^e minute après sa sortie.

- c. On complète le programme suivant, écrit en langage Python, qui doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil() :
    n = 0
    T = -19
    while T < 10
        T = 25 - 0,94T
        n = n+1
    return
```

EXERCICE au choix du candidat

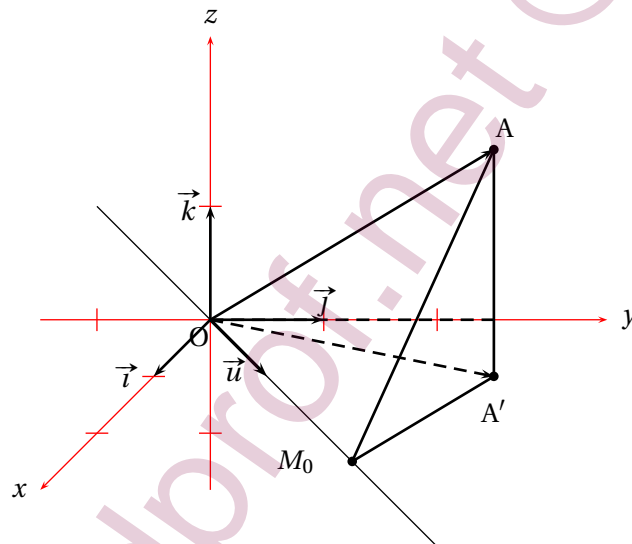
5 points

EXERCICE A

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé; orthogonalité dans l'espace

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère

- le point A de coordonnées $(1; 3; 2)$,
- le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur \vec{u} .



1. $M(x; y; z) \in (d) \iff \overrightarrow{OM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a. De $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$, on calcule :

$$AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b. $2t^2 - 8t + 14 = 2(t^2 - 4t + 7) = 2[(t-2)^2 - 4 + 7] = 2[(t-2)^2 + 3]$.

La plus petite valeur de ce trinôme est obtenue quand le carré est nul, soit pour $t = 2$.

On a : $2t^2 - 8t + 14 \geq 6$, soit $AM^2 \geq 6 \Rightarrow AM \geq \sqrt{6}$.

La plus petite distance est $AM_0 = \sqrt{6}$ avec $M_0(2; 2; 0)$.

3. On a : $\overrightarrow{AM_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) .

On a : $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. \vec{u} est orthogonal au plan horizontal d'équation $z = 0$. Comme A' et M_0 appartiennent à ce plan le vecteur \vec{u} est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{A'M_0}$.

Donc le vecteur \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(AA'M_0)$, donc la droite (d) est orthogonale au plan $(AA'M_0)$. Le point M_0 est donc le projeté orthogonal de O sur le plan $(AA'M_0)$, donc OM_0 est la distance la plus courte du point O au plan $(AA'M_0)$.

5. Aire de la base $AA'M_0$: on a $AA' = 2$ et $A'M_0^2 = (2-1)^2 + (2-3)^2 + 0^2 = 1+1 = 2$. D'où $A'M_0 = \sqrt{2}$.

$$\text{On a donc } \mathcal{A}(AA'M_0) = \frac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{D'autre part : } OM_0^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \text{ d'où } OM_0 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} = h.$$

$$\text{Finalement } V = \frac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}.$$

EXERCICE B

On considère l'équation différentielle (E) $y' = y + 2xe^x$

1. De $u(x) = x^2e^x$, on déduit que $u'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x) = x(x+2)e^x$.

Donc u solution de (E) si et seulement si :

$$u' = u + 2xe^x \iff 2xe^x + x^2e^x = x^2e^x + 2xe^x \text{ qui est vraie : } u \text{ est une solution particulière de (E).}$$

2. Soit $g(x) = f(x) - u(x)$

- a. f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :

$$f'(x) = f(x) + 2xe^x \quad (1).$$

Or $g(x) = f(x) - u(x) \iff f(x) = g(x) + u(x)$, d'où on déduit, les deux fonctions étant dérivables sur \mathbb{R} : $f'(x) = g'(x) + u'(x)$.

$$\text{L'égalité (1) devient : } g'(x) + u'(x) = g(x) + u(x) + 2xe^x \quad (2).$$

Or on a vu dans la question précédente que $u'(x) = u(x) + 2xe^x$

L'équation (2) devient donc : $g'(x) = g(x)$, ce qui signifie que la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.

- b. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions définies par $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$.

Donc on a $g(x) = Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$ et $f(x) = Ke^x + 2xe^x$.

Les solutions de l'équation (E) : $f(x) = (K+2)e^x$, $K \in \mathbb{R}$.

3. Étude de la fonction u

- a. On a $u'(x) = x(x+2)e^x$. Comme $e^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u'(x)$ est celui du trinôme $x(x+2)$ qui a pour racines -2 et 0 .

On sait que ce trinôme est positif, sauf entre les racines :

$$u'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[;$$

$$u'(x) < 0 \text{ sur }]-2; 0[;$$

$$u'(-2) = u'(0) = 0.$$

- b. De la question précédente il suit que u est croissante sauf sur $] -2 ; 0[$ où elle est décroissante, $u(-2) = 4e^{-2}$ et $u(0) = 0$ étant les deux extremums de la fonction sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
u		$4e^{-2}$	0	

Diagramme de variation : une flèche pointe de $-\infty$ vers -2 (montante), une flèche pointe de -2 vers 0 (descendante), et une flèche pointe de 0 vers $+\infty$ (montante).

c. u' est un produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc elle est dérivable sur \mathbb{R} :

$$u''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

Comme $e^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u''(x)$ est celui du trinôme $x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 4 + 2 = (x + 2)^2 - 2 = (x + 2)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + 2 + \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2})$.

Les racines de ce trinôme sont donc $-\sqrt{2} - 2$ et $-\sqrt{2} + 2$.

Le trinôme donc $u''(x)$ sont négatifs entre les racines.

Conclusion : la fonction est concave sur l'intervalle $]-\sqrt{2} - 2; +\sqrt{2} - 2[$.

