

Corrigé de l'entrée à l'école de santé Bron avril 2017

EXERCICE 1

8 points

QCM 1

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x} - x + 1$.

L'image de $\ln 2$ par la fonction f est :

- A. $\frac{1}{2} - \ln 3$ B. $-1 - \ln 2$ C. $\frac{3}{2} - \ln 2$ D. $3 - \ln 2$

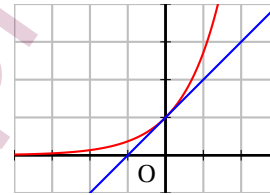
$$\left| f(\ln 2) = e^{-\ln 2} - \ln 2 + 1 = (e^{\ln 2})^{-1} - \ln 2 + 1 = 2^{-1} - \ln 2 + 1 = \frac{1}{2} - \ln 2 + 1 = \frac{3}{2} - \ln 2 \right.$$

QCM 2

Sur \mathbb{R} , l'inéquation $e^x - x \leq 1$ admet pour ensemble de solutions :

- A. \emptyset B. $\{0\}$ C. $[0; +\infty[$ D. \mathbb{R}

On peut représenter les deux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x + 1$ pour trouver la bonne réponse :
pour tout réel x , on a $e^x > x + 1$ sauf pour $x = 0$ où on a l'égalité $e^0 = 1$.



QCM 3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x}$.

Une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} est définie sur \mathbb{R} par :

- A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ B. $F(x) = -(1+x)e^{-x}$ C. $F(x) = -xe^{-x}$ D. $F(x) = (1-x)e^{-x}$

$$\left| \text{Si } F(x) = -(1+x)e^{-x}, \text{ alors } F'(x) = -1 \times e^{-x} + (-(1+x)) \times (-1)e^{-x} = (-1+1+x)e^{-x} = xe^{-x} = f(x) \right.$$

QCM 4

Pour tout réel x , l'expression $A(x) = \frac{e^x + e^{-3x}}{e^{2x}} - \frac{1 - e^{-2x}}{e^x}$ est égale à :

- A. $\frac{e^{2x} + 1}{e^{3x}}$ B. $e^{3x}(e^{-2x} + 1)$ C. $\frac{e^{2x} + 1}{e^{5x}}$ D. $e^{-5x} - e^{-3x}$

$$\left| \begin{aligned} A(x) &= \frac{e^x + e^{-3x}}{e^{2x}} - \frac{1 - e^{-2x}}{e^x} = \frac{e^x + e^{-3x}}{e^{2x}} - \frac{(1 - e^{-2x})e^x}{e^x \times e^x} = \frac{e^x + e^{-3x} - e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \\ &= \frac{e^{3x}(e^{-3x} + e^{-x})}{e^{3x} \times e^{2x}} = \frac{1 + e^{2x}}{e^{5x}} \end{aligned} \right.$$

QCM 5

La limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ est égale à :

A. 0

B. $+\infty$

C. 1

D. $\frac{1}{6}$

$$\left| \begin{aligned} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} &= \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{x+6-3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{6} \end{aligned} \right.$$

QCM 6

La fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x-3)\ln(2x)$ est :

A. positive sur $]0; +\infty[$ C. négative sur $]0; 1[$ B. négative sur $]0; +\infty[$ D. positive sur $[3; +\infty[$

On étudie le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	3	$+\infty$
$x-3$		-	0	+
$\ln(2x)$	-	0	+	+
$(x-3)\ln(2x)$		+	0	+

QCM 7

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x-3)\ln(2x)$.

Sa fonction dérivée est définie sur $]0; +\infty[$ par :

A. $\ln(2x) - \frac{x-3}{2x}$ B. $\ln(2x) + \frac{x-3}{x}$ C. $\frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{2x}$

$$\left| f'(x) = 1 \times \ln(2x) + (x-3) \times \frac{2}{2x} = \ln(2x) + \frac{x-3}{x} \right.$$

QCM 8

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = (-2x+5)^{-4}$.

Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$ est la fonction F définie sur cet intervalle par :

A. $F(x) = \frac{1}{5}(-2x+5)^{-5}$ C. $F(x) = \frac{1}{6}(-2x+5)^{-3}$ B. $F(x) = \frac{1}{10}(-2x+5)^{-5}$ D. $F(x) = -\frac{1}{3}(-2x+5)^{-3}$

$$\left| \text{ Si } F(x) = -\frac{1}{3}(-2x+5)^{-3}, \text{ alors } F'(x) = -\frac{1}{3} \times (-3) \times (-2x+5)^{-3-1} = (-2x+5)^{-4} = f(x). \right.$$

EXERCICE 2**5 points****QCM 9**

La documentaliste d'un collège a reçu une offre pour acheter les romans de la saga HP.

Elle enquête pour savoir si le sujet intéresse les élèves et relève que :

- 10 % des élèves ont lu le 7^e épisode,
- 38 % des élèves ont vu le 7^e épisode au cinéma,
- 40 % de ceux qui ne l'ont pas lu, ont vu le 7^e épisode au cinéma.

La documentaliste prend au hasard une réponse parmi celles des élèves interrogés. La probabilité que l'élève soit allé voir le 7^e épisode au cinéma sachant qu'il l'a lu est :

A. 0,3

B. 0,2

C. 0,038

D. 0,04

Si on appelle L l'événement « l'élève a lu le livre », et V l'événement « l'élève a vu l'épisode », on peut dire que d'après le texte, $P(L) = 0,10$, $P(V) = 0,38$ et $P_{\bar{L}}(V) = 0,40$.

$$P_{\bar{L}}(V) = 0,40 \text{ donc } \frac{P(\bar{L} \cap V)}{P(\bar{L})} = 0,40; P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 1 - 0,10 = 0,90$$

On déduit que $P(\bar{L} \cap V) = 0,40 \times 0,90 = 0,36$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(L \cap V) + P(\bar{L} \cap V)$

$$\text{donc } P(L \cap V) = P(V) - P(\bar{L} \cap V) = 0,38 - 0,36 = 0,02$$

$$P_L(V) = \frac{P(L \cap V)}{P(L)} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2$$

QCM 10

Un élève se présente à deux concours C et C' qui sont indépendants.

Il a une chance sur trois de réussir le concours C et une chance sur trois de réussir le concours C' .

En pensant augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours.

La probabilité qu'il réussisse au moins un concours est :

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ **D. $\frac{5}{9}$**

On appelle respectivement C et C' les événements « l'élève est reçu au concours C » et « l'élève est reçu au concours C' » ; on sait que $P(C) = \frac{1}{3}$ et $P(C') = \frac{1}{3}$.

Les événements sont indépendants donc $P(C \cap C') = P(C) \times P(C') = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

La probabilité que l'élève réussisse au moins un concours est :

$$P(C \cup C') = P(C) + P(C') - P(C \cap C') = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

EXERCICE 3**7 points**

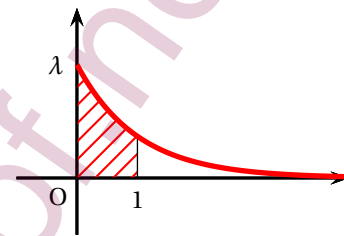
La durée d'attente, exprimée en heures, au service des urgences d'un hôpital peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

On sait alors que pour tout réel t positif : $P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est la fonction densité de la variable aléatoire T et l'on note \mathcal{C} la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

PARTIE A

- La probabilité $P(T \leq 1)$ est l'aire de la région du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$; c'est la région hachurée sur la figure ci-contre.
- Pour $x = 0$ on a $\lambda e^{-\lambda x} = \lambda$, donc λ est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentant la fonction $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ et de l'axe des ordonnées.



Dans la suite de l'exercice on suppose que $P(T \leq 1) = 0,92$ et l'on admet que $e^{-2,5} = 0,08$ à 10^{-2} près.

PARTIE B

- On sait que $P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ donc

$$P(T \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^1 = -e^{-\lambda} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda}$$
 On sait aussi que $P(T \leq 1) = 0,92$ donc on peut dire que $1 - e^{-\lambda} = 0,92$ ou encore que $e^{-\lambda} = 0,08$. Comme $e^{-2,5} \approx 0,08$, on peut dire que $\lambda \approx 2,5$.

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 2,5$.

- $$P(1 \leq T \leq 2) = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_1^2 = (-e^{-2\lambda}) - (-e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = e^{-\lambda} (1 - e^{-\lambda})$$

$$= 0,92 (1 - 0,92) = 0,92 \times 0,08 \approx 0,07$$
- $$P(T > 2) = 1 - (P(T \leq 1) + P(1 \leq T \leq 2)) \approx 1 - (0,92 + 0,07) \approx 0,01$$

PARTIE C

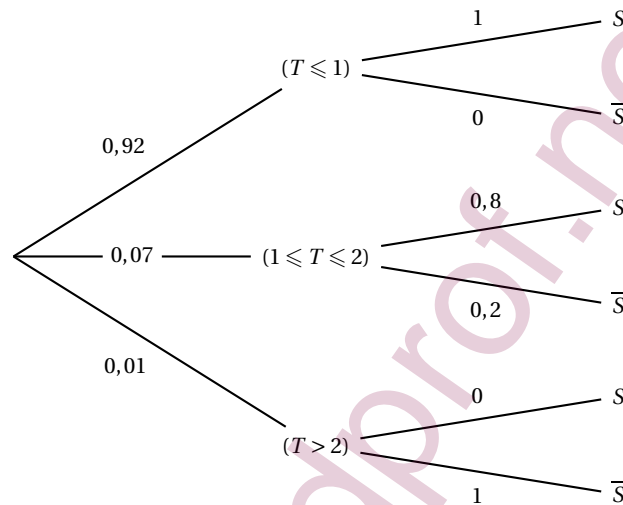
Dans cet hôpital, un questionnaire est distribué aux patients;

- si la durée d'attente est inférieure ou égale à 1 heure, les patients cochent la case « attente satisfaisante »;
- si la durée d'attente est comprise strictement entre 1 heure et 2 heures, alors 80 % des patients cochent la case « attente satisfaisante » et 20 % des patients cochent la case « attente non satisfaisante »;

- si la durée d'attente est supérieure ou égale à 2 heures, les patients cochent la case « attente non satisfaisante ».

1. On prélève de façon aléatoire un questionnaire.

- a. On résume les informations dans un arbre pondéré, en appelant S l'événement « l'attente est satisfaisante », et \bar{S} son événement contraire, « l'attente n'est pas satisfaisante ».



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P\left((T \leq 1) \cap S\right) + P\left((1 \leq T \leq 2) \cap S\right) + P\left((T \geq 2) \cap S\right) = 0,92 \times 1 + 0,07 \times 0,8 + 0,01 \times 0 \approx 0,98$$

- b. Sachant que la case cochée est « attente satisfaisante », la probabilité qu'elle provienne d'un patient ayant attendu entre 1 heure et 2 heures est

$$P_S(1 \leq T \leq 2) = \frac{P\left((1 \leq T \leq 2) \cap S\right)}{P(S)} \approx \frac{0,07 \times 0,8}{0,98} \approx 0,06$$

2. On prélève de façon aléatoire deux questionnaires.

L'événement contraire de l'événement « au moins un patient a coché la case "attente non satisfaisante" » est « les deux patients ont coché la case "attente satisfaisante" » dont la probabilité est

$$P(S) \times P(S) = 0,92 \times 0,92 = 0,8464.$$

La probabilité qu'au moins un patient ait coché la case « attente non satisfaisante » est donc $1 - 0,8464 \approx 0,15$.